ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Resolve Aprova

FUVEST 2006

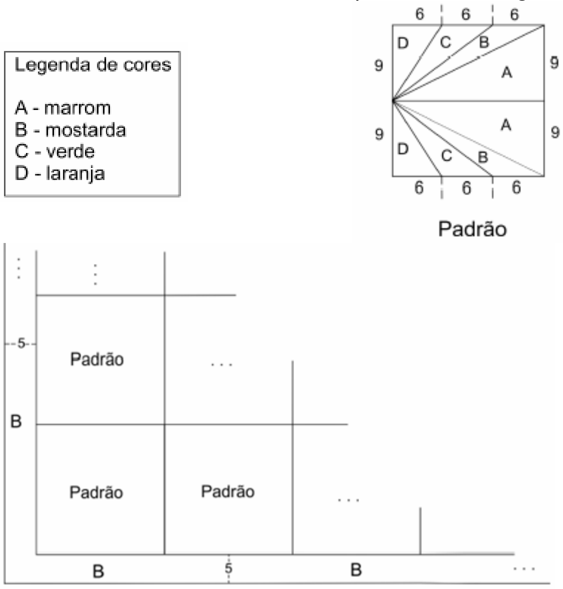
SEGUNDA FASE
MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br (19) 3251-1012

MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

Um tapete deve ser bordado sobre uma tela de 2 m por 2 m, com as cores marrom, mostarda, verde e laranja, da seguinte forma: o padrão quadrado de 18 cm por 18 cm, mostrado abaixo, será repetido tanto na horizontal quanto na vertical; e uma faixa mostarda, de 5 cm de largura, será bordada em toda a volta do tapete, como na figura.



a) Qual o tamanho do maior tapete quadrado, como descrito acima, que pode ser bordado na tela? Quantas vezes o padrão será repetido?
b) Se com um novelo de lã pode-se bordar 400 cm^2, qual é o número mínimo de novelos de lã mostarda necessário para confeccionar esse tapete?

Resolução

a) Temos o lado da tela de 2 m (200 cm). Porém precisamos descontar 10 cm para faixa mostarda (5 cm de cada lado). Como o lado do quadrado padrão é 18 cm, tem-se que 190/18 = 10,55. Portanto, para o comprimento da tela, o maior número de quadrados padrões possíveis é 10. Analogamente para a largura temos 10 quadrados padrões, portanto o número de quadrados padrões é 10x10 = 100 padrões.
Usando 10 quadrados padrões, no comprimento e na largura então o lado do tapete: 10x18 = 180 cm + 10 cm (referente a faixa mostarda) = 190 cm.
Assim, **o tamanho do maior tapete quadrado é 190 cm por 190 cm, e o número de quadrados padrões é 100**.

b) Área da faixa mostarda é dada pela área do tapete descontando a área dos padrões.
$A_{mostarda} = 190^2 - 180^2 = (190-180).(190+180) = 3700$ cm^2.
Em cada quadrado padrão, temos que a parte mostarda (A_B) é dada pela área dos triângulos B: $A_B = 2.\dfrac{6.9}{2} = 54$ cm^2.
Portanto nos 100 quadrados padrões temos 5400cm^2.
$A_{mostarda} = 5400 + 3700 = 9100$ cm^2;
Cada novelo borda 400 cm^2:

1 novelo	—	400 cm^2
n	—	9100 cm^2

n = 9100/400 = 22,75
Então serão necessários no mínimo 23 novelos

QUESTÃO 2

Um comerciante compra calças, camisas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30% respectivamente. O preço x que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia. Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.
a) Quanto esse cliente pagou por sua compra, em função de x?
b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

Resolução

a) Como x é o preço da calça, temos que x/3 é o preço da camisa e x/2 o preço da saia. De acordo com os lucros que o comerciante tem, os preços unitários das calças, camisas e saias são: $p_{calça} = 1,2x$; $p_{camisa} = 1,4\dfrac{x}{3}$ e $p_{saia} = 1,3\cdot\dfrac{x}{2}$

O preço que o cliente pagaria sem desconto seria (por 2 calças, 2 camisas e 2 saias):

$$p = 2.p_{calça} + 2.p_{camisa} + 2.p_{saia} = 2.1,2x + 2.1,4.\frac{x}{3} + 2.1,3.\frac{x}{2} = \frac{13,9x}{3}$$

Como o cliente obteve 10% de desconto, o preço que esse cliente pagou foi:

$$p' = 0,9p = 0,9\cdot\frac{13,9x}{3} = 4,17x$$

b) O preço que o comerciante pagou por 2 calças, 2 camisas e 2 saias é igual a: $2\left(x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{11x}{3}$. Assim, o lucro que ele obteve em sua compra foi: $4,17x - \dfrac{11}{3}x = \dfrac{1,51x}{3}$.

Logo, a porcentagem de lucro que o comerciante teve foi:

$$Lucro = \frac{\frac{1,51x}{3}}{\frac{11x}{3}} = \frac{1,51}{11} \cong 0,137 = 13,7\%$$

QUESTÃO 3

Uma função f satisfaz a identidade f(ax) = af(x) para todos os números reais a e x. Além disso, sabe-se que f(4) = 2. Considere ainda a função g(x) = f(x-1)+1 para todo o número real x.
a) Calcule g(3).
b) Determine f(x), para todo x real.
c) Resolva a equação g(x)=8.

Resolução

a) Como g(x) = f(x-1)+1, temos:

$$g(3) = f(3-1) + 1 = f(2) + 1 \qquad \text{(I)}$$

Do enunciado, temos:

$$\forall a, x \in R, f(ax) = a.f(x)$$
$$\Rightarrow f(4) = 2 \Rightarrow f(4) = f(2.2) = 2.f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), vem:

g(3) = 1+1 $\Rightarrow$ **g(3) = 2**

b) Dado que f(a.x)=a.f(x), temos $f(x) = f(x.1) = x.f(1)$. Como

$$f(2) = f(2.1) = 2.f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$, portanto,

$$f(x) = x.\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}$$, para todo x $\in$ R

c) Fazendo $g(x) = f(x-1) + 1 = \dfrac{x-1}{2} + 1 \Rightarrow g(x) = \dfrac{x+1}{2}$. Assim, se

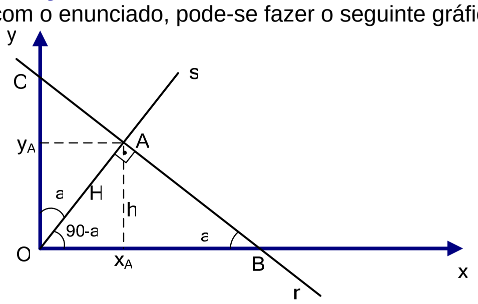
$$g(x) = 8 \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 8 \Rightarrow x = 15$$

QUESTÃO 4

A reta *s* passa pela origem O e pelo ponto A do primeiro quadrante. A reta *r* é perpendicular à reta *s*, no ponto A, e intercepta o eixo x no ponto B e o eixo y no ponto C. Determine o coeficiente angular de *s* se a área do triângulo OBC for o triplo da área do triângulo OAB.

Resolução

De acordo com o enunciado, pode-se fazer o seguinte gráfico:



$$m_s = \frac{y_A - 0}{x_A - 0} = \frac{y_A}{x_A}$$

Da figura, pode-se perceber que ΔOBC ~ ΔABO, pois possuem 3 ângulos idênticos.
Como $A_{OBC} = 3.A_{ABO}$, temos que a razão de semelhança é:

$$k = \sqrt{3}$$

Tomando a relação entre as alturas dos triângulos, em relação aos ângulos retos (H e h), temos:

$$\frac{H}{h} = \frac{OA}{y_A} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2}}{y_A} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2} = y_A\sqrt{3}$$

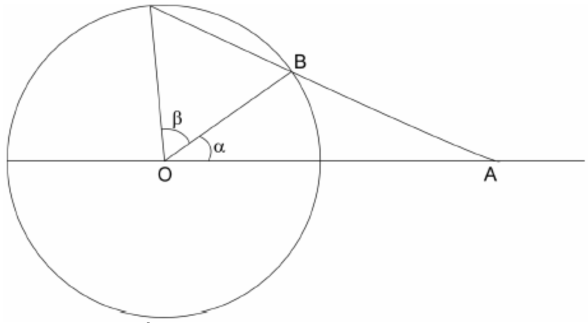
$$x_A{}^2 + y_A{}^2 = 3y_A{}^2 \Rightarrow x_A{}^2 = 2.y_A{}^2 \Rightarrow x_A = y_A\sqrt{2}$$

Assim, temos

$$m_s = \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_A}{y_A\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

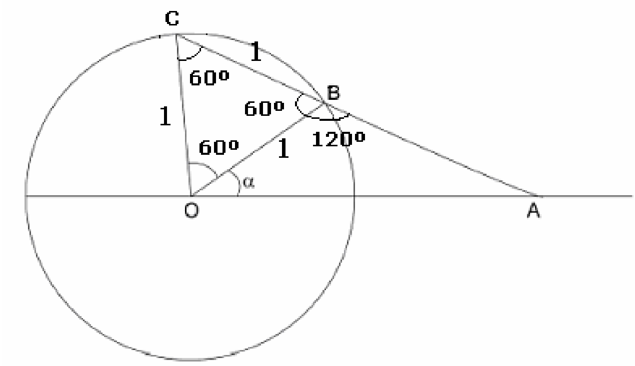
QUESTÃO 5

Na figura abaixo, O é o centro da circunferência de raio 1, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é secante a ela, o ângulo β mede 60º e senα= $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



a) Determine sen(OÂB) em função de AB.
b) Calcule AB.

Resolução



Na figura, temos que OB = OC = 1 (raio). Assim, o triângulo OBC é isósceles, e, como β = 60º, os ângulos B e C do triângulo OBC medem 60º cada, logo, o triângulo OBC é eqüilátero.
a) Utilizando a Lei dos Senos no triângulo OAB:

$$\frac{AB}{sen\alpha} = \frac{OB}{senO\hat{A}B} \Rightarrow senO\hat{A}B = \frac{OB.sen\alpha}{AB} = \frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}{AB} \Rightarrow$$

$$senO\hat{A}B = \frac{\sqrt{3}}{4\cdot AB}$$

b) Usando a lei dos Senos no triângulo OAC:

$$\frac{OA}{sen\,60^o} = \frac{OC}{senO\hat{A}B} \Rightarrow \frac{OA}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4\cdot AB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4\cdot AB}\cdot OA = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OA = 2\cdot AB$$

Usando a Lei dos Cossenos no triângulo OAB:

$$OA^2 = 1^2 + AB^2 - 2\cdot 1\cdot AB\cdot\cos 120^o$$

Substituindo, OA = 2AB neste resultado, temos:

$$4AB^2 = 1 + AB^2 + AB \Rightarrow 3AB^2 - AB - 1 = 0$$

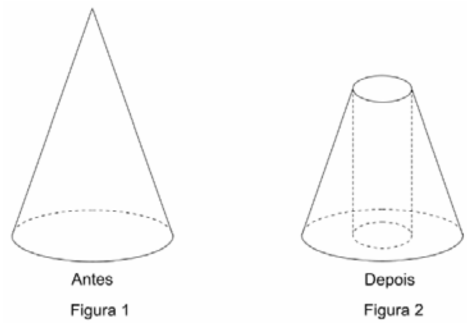
$$AB = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{1^2 - 4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$$

$$AB = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \text{ não convém, pois } AB > 0.$$

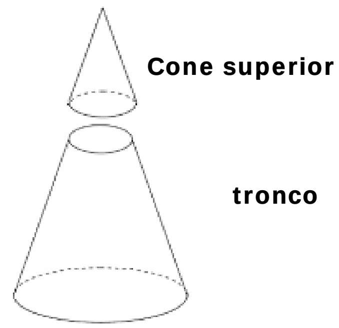
$$AB = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

QUESTÃO 6

Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15 cm de altura e cuja base B tem raio 8 cm (Figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da Figura 2. Se a área da base deste novo sólido é $\frac{2}{3}$ da área de B , determine seu volume.



Resolução



O volume solicitado é dado por:

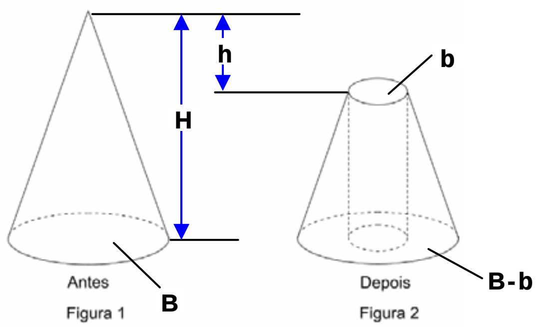
V = V_{tronco} – $V_{cilindro}$, onde

V_{tronco} = V_{cone} - $V_{cone\text{-}superior}$

Assim, para determinarmos o volume V solicitado, calcularemos V_{tronco} e $V_{cilindro}$.

Sejam B a área da base do cone, B-b a área da base do novo sólido e b a área da base do cilindro, conforme figura a seguir. Assim, temos:

$$B - b = \frac{2}{3}B \text{ e } b = \frac{1}{3}B .$$



Como o cone de base B e o cone de base b (cone superior) são semelhantes, então a relação entre as áreas de suas bases é proporcional à relação entre os quadrados de suas alturas:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{h^2}{15^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{225}{3}} = \sqrt{75}\text{ cm}$$

$$h = 5\sqrt{3}\text{ cm}$$

Portanto, o volume do tronco é dado por:

$$V_{tronco} = V_{cone} - V_{cone\text{-}superior} \Rightarrow$$

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}B.H - \frac{1}{3}bh = \frac{1}{3}\left(B.15 - \frac{1}{3}Bh\right) = \frac{1}{3}B\left(15 - \frac{1}{3}h\right)$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{1}{3}\pi.8^2\left(15 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{64}{9}\left(45 - 5\sqrt{3}\right)\pi \text{ cm}^3$$

Já o volume do cilindro é dado por:

$V_{cilindro} = b.(H-h) = \frac{1}{3}B.\left(15 - 5\sqrt{3}\right) = \frac{64\pi}{3}\left(15 - 5\sqrt{3}\right)\text{cm}^3$ Logo, o volume do novo sólido é:

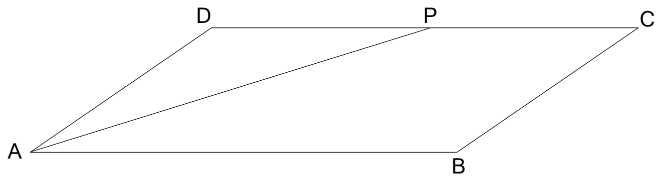
$$V = V_{tronco} - V_{cilindro} = \frac{64\pi}{9}\left(45 - 5\sqrt{3}\right) - \frac{64\pi}{3}\left(15 - 5\sqrt{3}\right)$$

$$V = \frac{64\pi}{9}\left(45 - 5\sqrt{3}\right) - \frac{64\pi}{9}\left(45 - 15\sqrt{3}\right) = \frac{64\pi.(15\sqrt{3} - 5\sqrt{3})}{9}\text{ cm}^3$$

$$V = \frac{640\pi\sqrt{3}}{9}\text{ cm}^3$$

QUESTÃO 7

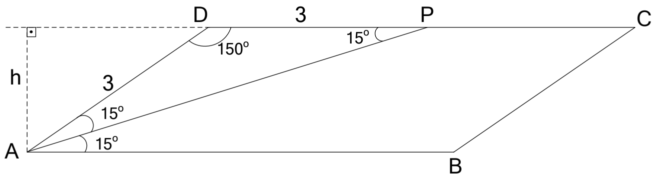
No paralelogramo ABCD abaixo, tem-se que AD=3 e DÂB=30º. Além disso, sabe-se que o ponto P pertence ao lado $\overline{DC}$ e à bissetriz do ângulo DÂB.



a) Calcule AP.
b) Determine AB sabendo que a área do quadrilátero ABCP é 21.

Resolução

a) Se $D\hat{A}B = 30° \Rightarrow A\hat{D}P = 150°$, uma vez que ABCD é um paralelogramo. Como o ponto P pertence à bissetriz de DÂB, o segmento AP é justamente a bissetriz desse ângulo, logo, $D\hat{A}P = 15°$. Assim, se $A\hat{D}P = 150°$ e $D\hat{A}P = 15° \Rightarrow A\hat{P}D = 15°$, e o triângulo ADP é isósceles, com DP = 3.



Aplicando a lei dos cossenos nesse triângulo:

$$AP^2 = AD^2 + DP^2 - 2.AD.DP.\cos 150° = 9 + 9 - 2.9.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AP^2 = 18 + 9\sqrt{3} \Rightarrow AP = \sqrt{18 + 9\sqrt{3}} = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

b) A altura do triângulo ADP em relação à base PD, também a altura do paralelogramo, é dada por:

$$h = AD \times sen\ \ 30° \Rightarrow h = 3.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Como a área do paralelogramo (A_{ABCD} = AB.h) é dada pela soma das áreas do triângulo ADP (A_{ADP} = AD.h/2) e do quadrilátero ABCP, temos:

$$A_{ABCD} = A_{ADP} + A_{ABCP}$$

$$AB \times h = \frac{AD \times h}{2} + 21$$

$$AB \times \frac{3}{2} = \frac{3.\frac{3}{2}}{2} + 21 = \frac{93}{4}$$

$$AB \times \frac{3}{2} = \frac{93}{4}$$

$$AB = \frac{31}{2}$$

QUESTÃO 8

Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\text{Im}\left(\frac{z - i}{1 + i}\right) = \frac{1}{2}$.

Lembretes: i^2 =-1; se w = a + bi, com *a* e *b* reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e Im(w) = b.

Resolução

Sendo z = x + yi, temos que:

i) $|\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

ii)

$$\frac{z - i}{1 + i} = \frac{x + yi - i}{1 + i} = \frac{x + (y-1)i}{1 + i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} = \left(\frac{x + y - 1}{2}\right) + \left(\frac{-x + y - 1}{2}\right)i$$

Assim, temos que

$$\text{Im}\left(\frac{z - i}{1 + i}\right) = \left(\frac{-x + y - 1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow -x + y = 2 \Rightarrow x = y - 2$$

De (i) e (ii):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow (y-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = 2$$

Se y = 0: x = 0 -2 = -2 ∴ z = -2
Se y = 2: x = 2 – 2 = 0 ∴ z = 2i
Os números complexos são **z = -2 ou z = -2i**

QUESTÃO 9

Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x + \left(\cos^2 a\right)y + \left(sen^2 a\right)z = 0 \\ x + \left(\cos^2 b\right)y + \left(sen^2 b\right)z = 0 \\ \left(\cos^2 c\right)y + \left(sen^2 c\right)z = 0 \end{cases}$$

a) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear.
b) Para que valores de *a*, *b* e *c* o sistema linear admite soluções não triviais?
c) Calcule as soluções do sistema quando e sen^2a = *1 e* $\cos^2 c$ = *1/5*.

Resolução

a) Seja D o determinante solicitado:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a & sen^2 a \\ 1 & \cos^2 b & sen^2 b \\ 0 & \cos^2 c & sen^2 a \end{vmatrix}$$

Substituindo a linha 2 por (linha 1 – linha 2):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a & sen^2 a \\ 0 & \cos^2 b - \cos^2 a & sen^2 b - sen^2 a \\ 0 & \cos^2 c & sen^2 c \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace:

$$D = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \cos^2 b - \cos^2 a & sen^2 b - sen^2 a \\ \cos^2 c & sen^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= sen^2 c.\left(\cos^2 b - \cos^2 a\right) - \cos^2 c.\left(sen^2 b - sen^2 a\right) =$$

$$= sen^2 c.\left(\cos^2 b - \cos^2 a\right) + \left(sen^2 c - 1\right).\left(sen^2 b - sen^2 a\right) =$$

$$= sen^2 c.\left[\cos^2 b + sen^2 b - (\cos^2 a + sen^2 a)\right] + sen^2 a - sen^2 b =$$

$$= sen^2 c.(1 - 1) + sen^2 a - sen^2 b = sen^2 a - sen^2 b$$

D = sen^2a – sen^2b

b) O sistema admite soluções não triviais se D = 0, ou seja, sen^2a = sen^2b. Assim:

$$|sen\ a| = |sen\ b| \Rightarrow sen\ a = \pm sen\ b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \pm b + 2k\pi \\ a = \pm(\pi - b) + 2k\pi \end{cases} \text{com } k = 0, \pm 1, \pm 2...$$

a = ± b + kπ, com k = 0, ±1, ±2, ...

c) Se $\text{sen}^2a = 1$, então $D = 1-\text{sen}^2b = \cos^2b$.
Se D = 0, temos: $\cos^2b = 0$, logo, o sistema é possível e indeterminado (infinitas soluções)
Da última equação, vem:

$$(\cos^2c)y + (\text{sen}^2c)z = 0$$

Como $\cos^2c = \frac{1}{5}$, então $\text{sen}^2c = 1-\cos^2c = \frac{4}{5}$

$$\frac{1}{5}y + \frac{4}{5}z = 0 \Rightarrow y = -4z$$

Observando a primeira equação:

$$x + (\cos^2a)y + (\text{sen}^2a)z = 0$$

Como $\text{sen}^2a = 1$, temos $\cos^2a = 0$. Assim

$$x + z = 0 \Rightarrow x = -z$$

Logo, temos um SPI, com solução (x,y,z)=(-z,-4z,z)
Se $\cos^2b \neq 0$, temos um sistema possível e determinado, cuja solução é a trivial (x=y=z=0).
Assim,

$$(x,y,z)=(-z,-4z,z) \text{ se } \cos b=0 \text{ e } (x,y,z)=(0,0,0) \text{ se } \cos b\neq 0$$

QUESTÃO 10

a) Determine os pontos A e B do plano cartesiano nos quais os gráficos de $y = \frac{12}{x} - 1$ e $x + y - 6 = 0$ se interceptam.

b) Sendo O a origem, determine o ponto C no quarto quadrante que satisfaz $A\hat{O}B = A\hat{C}B$ e que pertence à reta x =2.

Resolução

a) Para encontrarmos os pontos A e B, basta resolvermos o sistema:

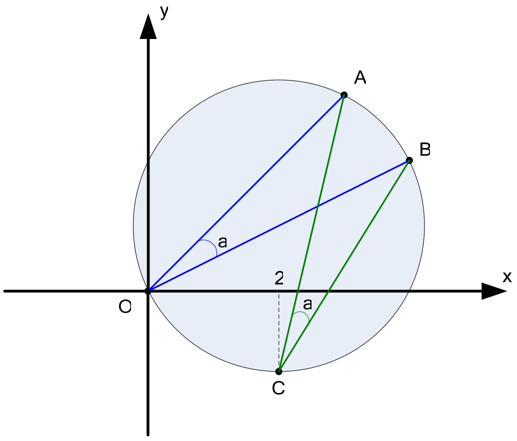
$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 & (I) \\ y = \dfrac{12}{x} - 1 & (II) \end{cases}$$

De (I), temos y = -x+6, e substituindo em (II):

$$-x + 6 = \frac{12}{x} - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 4.$$

Substituindo em I
Se x = 3 ⇒ y = 3, daí A (3,3),
Se x = 4 ⇒ y = 2, daí B (4,2).

b) O lugar geométrico dos pontos que visam o segmento AB através de um ângulo α é dado por uma circunferência, na qual se encontram os pontos A, B e O.



De acordo com a figura acima precisamos, encontrar um ponto da circunferência cuja abscissa x seja 2.

O centro da circunferência é o circuncentro do triângulo OAB, e portanto sendo o encontro das mediatrizes.

Sendo r a mediatriz entre os pontos A e O.

$$m_{AO} = \frac{y_o - y_A}{x_o - x_A} = \frac{3-0}{3-0} = 1$$

$$m_{AO}.m_r = -1 \Rightarrow m_r = -1.$$

Sendo o P (x_p, y_p) o ponto médio do segmento AO, então

$$x_p = \frac{x_A + x_O}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \text{ e } y_p = \frac{y_A + y_O}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$$

Assim a reta r é dada por:
$y-y_o = m(x-x_o) \Rightarrow y - 3/2 = -1(x-3/2) \Rightarrow y = -x + 3.$

Sendo s a mediatriz entre os pontos A e B.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{3-4} = -1$$

$$m_{AB}.m_s = -1 \Rightarrow m_s = 1.$$

Sendo Q (x_q, y_q) o ponto médio do segmento AB, então

$$x_q = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \text{ e } y_q = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

Assim a reta s é dada por:
$y-y_o = m(x-x_o) \Rightarrow y - 5/2 = 1.(x-7/2) \Rightarrow y = x - 1.$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ encontra-se o centro da circunferência.
x-1 = -x+3 ⇒ x = 2 ⇒ y = 1. Portanto o centro (2,1).

Para encontrarmos o raio, é preciso determinar a distância entre centro e a origem.
$d^2 = (2-0)^2 + (1-0)^2 \Rightarrow d = \sqrt{5}$.
Assim a equação da circunferência que passa pelos pontos A, B e O é dada pela equação:

$$\mathbf{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5}$$

Lembremos que a abcissa do ponto C é 2, então:
$(2-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow (y-1)^2 = 5 \Rightarrow y-1= \pm\sqrt{5} \Rightarrow y = 1\pm\sqrt{5}$
Como C pertence ao quarto quadrante, então $y = 1-\sqrt{5}$

$$\mathbf{C\ (2,\ 1-\sqrt{5}\ )}$$