ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

ELITE RESOLVE

FUVEST 2ª FASE MATEMÁTICA

2008

www.elitecampinas.com.br

(19) 3251-1012

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R$21,50. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R$ 57,00.
Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R$ 10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

Resolução

Chamando de H o preço de um hambúrguer, L o preço de um suco de laranja e C o preço de uma cocada, podemos montar o seguinte sistema a partir do enunciado:

$$\begin{cases} H+L+C=10{,}00 & (I) \\ 3H+L+2C=21{,}50 & (II) \\ 8H+3L+5C=57{,}00 & (III) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (– 3) e somando em (II) e multiplicando a equação (I) por (– 8) e somando em (III), o sistema fica:

$$\begin{cases} H+L+C=10{,}00 & (I) \\ 2L+C=8{,}50 & (IV) \\ 5L+3C=23{,}00 & (V) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado por (IV) e (V), temos:

$$\begin{cases} 2L+C=8{,}50 \\ 5L+3C=23{,}00 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6L-3C=-25{,}50 \\ 5L+3C=23{,}00 \end{cases} \Leftrightarrow -L=-2{,}50 \Leftrightarrow L=2{,}50 .$$

Substituindo em (IV):
$$2L+C=8{,}50 \Rightarrow 2\cdot 2{,}50+C=8{,}50 \Rightarrow C=3{,}50$$

Substituindo em (I)
$$H+L+C=10{,}00 \Rightarrow H+2{,}50+3{,}50=10 \Rightarrow H=4{,}00$$

Assim, o preço de um hambúrguer é R$4,00, o preço de um suco de laranja é R$2,50 e o preço de uma cocada é R$3,50.

QUESTÃO 02

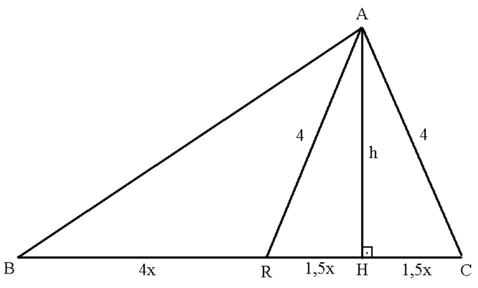
No triângulo *ABC*, tem-se que *AB* > *AC*, *AC* = *4* e $\cos\hat{C}=\frac{3}{8}$.

Sabendo-se que o ponto *R* pertence ao segmento $\overline{BC}$ e é tal que *AR* = *AC* e $\frac{BR}{BC}=\frac{4}{7}$, calcule

a) a altura do triângulo *ABC* relativa ao lado *BC*.
b) a área do triângulo *ABR*

Resolução

Como $\frac{BR}{BC}=\frac{4}{7}$, seja BR = 4x, logo, BC = 7x, e por isso, RC = 7x - 4x = 3x. Como AR = AC, temos que o triângulo ACR é isósceles, logo, a altura AH desse triângulo divide a base CR de tal modo que $CH=RH=\frac{RC}{2}=\frac{3x}{2}=1{,}5x$, conforme figura abaixo:



a) Como $\cos\hat{C}=\frac{3}{8}$, temos pela Relação Fundamental que:

$$sen^2\hat{C}+\cos^2\hat{C}=1 \Rightarrow sen^2\hat{C}+\left(\frac{3}{8}\right)^2=1 \Rightarrow sen^2\hat{C}=\frac{55}{64} \Rightarrow sen\hat{C}=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

No triângulo AHC, temos:

$$sen\hat{C}=\frac{AH}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{55}}{8}=\frac{h}{4} \Rightarrow h=\frac{\sqrt{55}}{2}$$

b) Ainda no triângulo AHC, temos:

$$\cos\hat{C}=\frac{CH}{4} \Rightarrow \frac{3}{8}=\frac{1{,}5x}{4} \Rightarrow x=1$$

Assim, BR = 4x = 4.

Como $h=\frac{\sqrt{55}}{2}$ também é altura do triângulo ABR, relativa à base BR, temos que:

$$A_{\Delta ABR}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{55}}{2}=\sqrt{55}$$

QUESTÃO 03

Um polinômio de grau 3 possui três raízes reais que, colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética em que a soma dos termos é igual a $\frac{9}{5}$. A diferença entre o quadrado da maior raiz e o quadrado da

menor raiz é $\frac{24}{5}$.

Sabendo-se que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio é 5, determine

a) a progressão aritmética.
b) o coeficiente do termo de grau 1 desse polinômio.

Resolução

a) Sejam **a**, **b** e **c** as três raízes do polinômio, em ordem crescente. Como as raízes estão em progressão aritmética, vale que:

$$b=\frac{a+c}{2} \Rightarrow a+c=2b$$

Agora, como a soma desses três termos vale $\frac{9}{5}$, temos:

$$a+b+c=\frac{9}{5} \Rightarrow b+2b=\frac{9}{5} \Rightarrow b=\frac{3}{5}$$

Assim, $a+c=2b=2\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow a+c=\frac{6}{5}$.

Sendo ***c*** a maior raiz e ***a*** a menor raiz, temos ainda:

$$c^2-a^2=\frac{24}{5} \Rightarrow (c+a)\cdot(c-a)=\frac{24}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}\cdot(c-a)=\frac{24}{5} \Rightarrow$$
$$c-a=4$$

Logo:

$$\begin{cases} a+c=\frac{6}{5} \\ c-a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{7}{5} \\ c=\frac{13}{5} \end{cases}$$

Desse modo, a progressão aritmética pedida é:

$$\boxed{PA\left(-\frac{7}{5},\frac{3}{5},\frac{13}{5}\right)}$$

b) Seja p(x) o polinômio de grau 3 considerado. Então p pode ser escrito como:

$$p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Utilizando as relações de Girard, vem que:

$$\frac{a_1}{a_3}=a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c$$

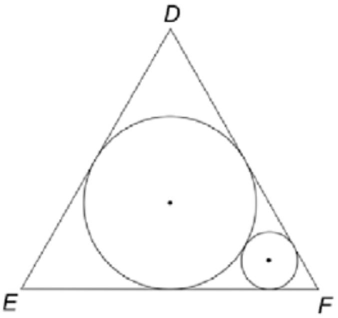
Como o coeficiente do termo de maior grau é a_3, que de acordo com o enunciado vale 5, temos:

$$a_1=a_3\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)=5\cdot\left(-\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{5}-\frac{7}{5}\cdot\frac{13}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{13}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{a_1=-\frac{73}{5}}$$

QUESTÃO 04

O círculo *C*, de raio *R*, está inscrito no triângulo eqüilátero *DEF*. Um círculo de raio *r* está no interior do triângulo *DEF* e é tangente externamente a *C* e a dois lados do triângulo, conforme a figura.

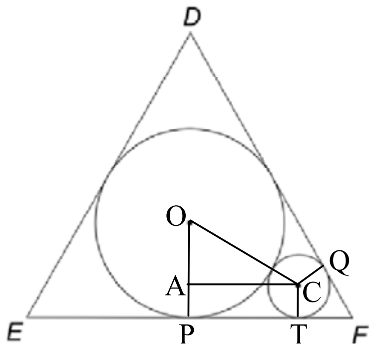


Assim, determine

a) a razão entre *R* e *r*.
b) a área do triângulo *DEF* em função de *r*.

Resolução

Considere a figura a seguir:



A partir da figura, temos:
i) C é o centro da circunferência menor;
ii) O é o centro da circunferência maior;
iii) P, Q e T são pontos de tangência;
Assim, temos que OP = R, CT = CQ = r, AO = R – r e OC = R+r.
Considerando-se os triângulos CTF e CQF, temos CT = CQ, TF = QF (segmentos tangentes à circunferência) e CF é comum a ambos. Logo, os triângulos são congruentes pelo caso LLL. Assim, segue que o ângulo $T\hat{F}C$ mede 30º.
Observe que o segmento CF é o prolongamento de OC, de modo que, como AC//PF, temos que o ângulo $A\hat{C}O$ mede 30º.

a) Considerando o triângulo ACO, temos:

$$\text{sen}A\hat{C}O = \frac{R-r}{R+r} = \text{sen}30^o \Rightarrow \frac{R-r}{R+r} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$R + r = 2R - 2r \Rightarrow R = 3r \Rightarrow \frac{R}{r} = 3.$$

b) Sabendo-se que o triângulo DEF é eqüilátero, e que R é o raio da circunferência inscrita à DEF, temos que vale a relação $R = \frac{1}{3}h$, onde h é a altura do triangulo DEF.
Seja L o lado do triângulo DEF. Assim:

$$R = \frac{1}{3}\frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = \frac{6R}{\sqrt{3}} \Rightarrow L = 2\sqrt{3}R.$$

Como a área de um triângulo eqüilátero de lado L é dada por $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, temos:

$$A_{DEF} = \frac{(2\sqrt{3}R)^2\sqrt{3}}{4} = 3R^2\sqrt{3}.$$

Do item (a), sabemos que R=3r. Assim:

$$A_{DEF} = 3R^2\sqrt{3} = 3(3r)^2\sqrt{3} = 27r^2\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

QUESTÃO 05

A medida *x*, em radianos, de um ângulo satisfaz $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e verifica a equação senx + sen2x + sen3x = 0
Assim,

a) determine *x*.
b) calcule cosx + cos2x + cos3x.

Resolução

a) Do enunciado temos $senx + sen2x + sen3x = 0$. Rearranjando os termos e fazendo a transformação $sena + senb = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ temos:

$$sen2x + sen3x + senx = 0$$

$$sen2x + 2sen\left(\frac{3x+x}{2}\right)cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 0$$

$$sen2x + 2sen2x \cdot \cos x = 0$$

Colocando sen2x em evidência:

$$sen2x \cdot (1 + 2cosx) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen2x = 0 & (I) \\ \quad ou & \\ 1 + 2cosx = 0 & (II) \end{cases}$$

Portanto, de (I) temos:

$$sen2x = 0 \Rightarrow 2x = k\cdot\pi \Rightarrow x = \frac{k\cdot\pi}{2}, \quad k \in Z$$

Assim, a equação acima não admite solução no intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Por sua vez, de (II) temos:

$$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi, \quad k \in Z$$

Logo, no intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos que $x = \frac{2\pi}{3}$.

b) Como $x = \frac{2\pi}{3}$, temos que:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos 2\pi = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

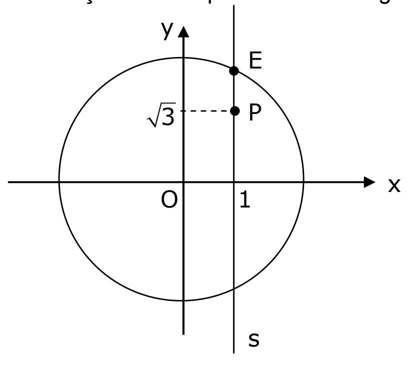
QUESTÃO 06

São dados, no plano cartesiano de origem O, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$, e o ponto P = $(1, \sqrt{3})$ e a reta *s* que passa por P e é paralela ao eixo y. Seja *E* o ponto de ordenada positiva em que a reta *s* intercepta a circunferência.
Assim sendo, determine

a) a reta tangente à circunferência no ponto *E*.
b) o ponto de encontro das alturas do triângulo *OPE*.

Resolução

a) A circunferência em questão está centrada na origem e tem raio $\sqrt{5}$. Além disso, como $x_P^2 + y_P^2 = 1 + 3 < 5$, o ponto P é um ponto interior à circunferência.
A reta *s*, paralela ao eixo y, e passando pelo ponto P, é a reta de equação x = 1. A situação está esquematizada na figura abaixo.



O ponto E tem abscissa $x_E = 1$, já que pertence à reta *s*. Como ele também pertence à circunferência, temos $1^2 + {y_E}^2 = 5 \Rightarrow y_E = 2$ (aqui estamos descartando a possibilidade $y_E = -2$ porque, segundo o enunciado, a ordenada do ponto E deve ser positiva).
Como a reta tangente à circunferência num determinado ponto é sempre perpendicular ao raio nesse ponto, a reta procurada é a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OE}$ no ponto E. Assim, se m_{OE} e $m_{\perp}$ as inclinações de cada uma das retas, temos:

$$m_{OE} = \frac{y_E - y_O}{x_E - x_O} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

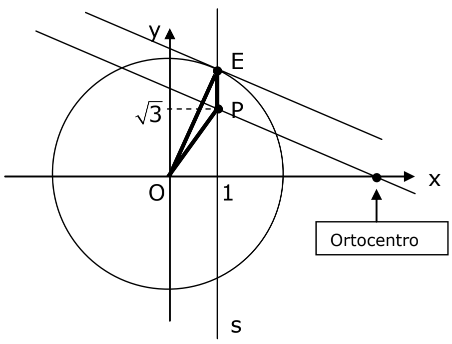
$$m_{\perp}.m_{OE} = -1 \Rightarrow m_{\perp} = -\frac{1}{m_{OE}} = -\frac{1}{2}$$

Logo:

$$y - y_E = m_{\perp} \cdot (x - x_E) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x-1) \Rightarrow$$

$$\boxed{x + 2y - 5 = 0}$$

b) As alturas do triângulo estão contidas nas retas que passam por cada vértice e são perpendiculares à reta suporte do lado oposto. Assim, para determinar o ortocentro (ponto de encontro das alturas) do ΔOPE, fazemos a intersecção de quaisquer duas retas dentre essas três.
Para nosso problema, temos que uma das alturas está contida no eixo x (reta y = 0, que passa pelo ponto O e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{PE}$), e outra altura está contida numa reta que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OE}$ (chamemos essa reta de *r*).
Como a reta tangente determinada no item (a) também é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OE}$, ela deve ser paralela à reta *r*, conforme a figura abaixo:



Assim, a equação da reta *r* será dada por:

$$m_r = m_{\perp} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - y_P = m_r \cdot (x - x_P) \Rightarrow$$

$$y - \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \cdot (x-1)$$

Fazendo a intersecção dessa reta com o eixo x, temos:

$$0 - \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \cdot (x-1) \Rightarrow x = 1 + 2\sqrt{3}$$

Logo, o ortocentro do triângulo OPE é o ponto $\boxed{(1+2\sqrt{3}, 0)}$.

QUESTÃO 07

Em um jogo entre Pedro e José, cada um deles lança, em cada rodada, um mesmo dado honesto uma única vez. O dado é cúbico, e cada uma de suas 6 faces estampa um único algarismo de maneira que todos os algarismos de 1 a 6 estejam representados nas faces do dado.
Um participante vence, em uma certa rodada, se a diferença entre seus pontos e os pontos de seu adversário
for, no mínimo, de duas unidades. Se nenhum dos participantes vencer, passa-se a uma nova rodada.
Dessa forma, determine a probabilidade de

a) Pedro vencer na primeira rodada.
b) nenhum dos dois participantes vencer na primeira rodada.
c) um dos participantes vencer até a quarta rodada.

Resolução

a) Pedro só vencerá nos seguintes casos:

Pedro	José	Total de maneiras
6	1, 2, 3 ou 4	4
5	1, 2, ou 3	3
4	1 ou 2	2
3	1	1
		Total: 10

Ao se lançar 2 dados, o número de resultados possíveis é 6.6 = 36, logo, temos que:

$$P_{\text{Pedro vencer}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b) As probabilidades de Pedro e José vencer em qualquer rodada são as mesmas. Também temos que as probabilidades são mutuamente exclusivas. Logo, a probabilidade de nenhum dos dois vencer na primeira rodada é igual a:

$$P_{\text{Ambos perderem}} = 1 - P_{\text{Pedro vencer}} - P_{\text{José vencer}} = 1 - \frac{5}{18} - \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

c) A chance de nenhum participante vencer até a quarta rodada é igual a

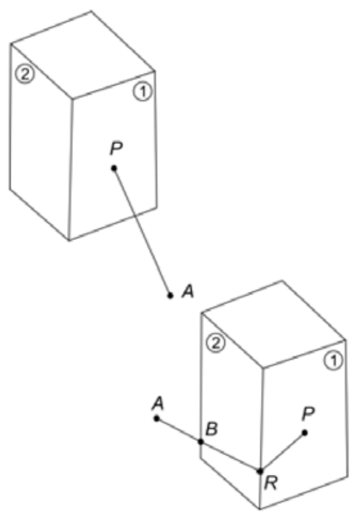
$$p = p_{\substack{\text{ninguém}\\\text{vencer}\\\text{na 1ª}}} \cdot p_{\substack{\text{ninguém}\\\text{vencer}\\\text{na 2ª}}} \cdot p_{\substack{\text{ninguém}\\\text{vencer}\\\text{na 3ª}}} \cdot p_{\substack{\text{ninguém}\\\text{vencer}\\\text{na 4ª}}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{256}{6561}$$

Logo, a probabilidade de algum dos participantes vencer até a quarta rodada é igual a:

$$p = 1 - \frac{256}{6561} = \frac{6305}{6561}$$

QUESTÃO 08

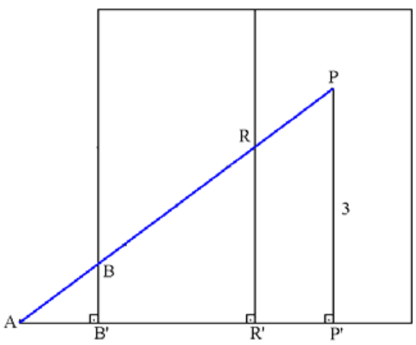
Um poste vertical tem base quadrada de lado 2.
Uma corda de comprimento 5 está esticada e presa a um ponto *P* do poste, situado à altura 3 do solo e distando 1 da aresta lateral. A extremidade livre *A* da corda está no solo, conforme indicado na figura.
A corda é então enrolada ao longo das faces 1 e 2, mantendo-se esticada e com a extremidade *A* no solo, até que a corda toque duas arestas da face 2 em pontos *R* e *B*, conforme a figura.



Nessas condições,
a) calcule *PR*.
b) calcule *AB*.

Resolução

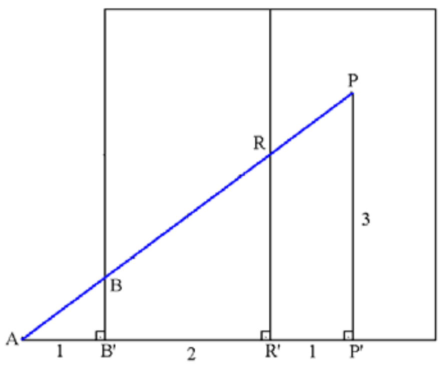
Planificando-se as faces 1 e 2 do poste, obtemos a seguinte figura:



Como PP’ = 3 e AP = 5, temos, pelo Teorema de Pitágoras:

$$5^2 = 3^2 + AP'^2 \Rightarrow AP' = 4$$

Assim, temos que AB’ = 4 – 2 – 1 = 1, e nossa figura fica com as seguintes medidas:



a) Como RR’//PP’, temos que os triângulos APP’ e ARR’ são semelhantes, de modo que:

$$\frac{AP}{AP'} = \frac{AR}{AR'} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{AR}{3} \Rightarrow AR = \frac{15}{4}$$

Logo, $PR = AP - AR = 5 - \frac{15}{4} = \frac{5}{4}$.

b) Os triângulos APP’ e ABB’ também são semelhantes. Assim:

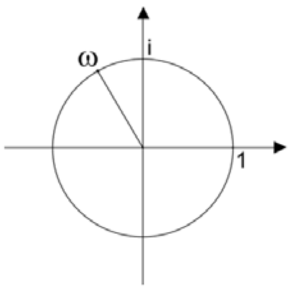
$$\frac{AP}{AP'} = \frac{AB}{AB'} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{AB}{1} \Rightarrow AB = \frac{5}{4}$$

QUESTÃO 09

A figura na página de respostas representa o número $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. Nessas condições,

a) determine as partes real e imaginária de $\frac{1}{\omega}$ e de ω^3.

b) represente $\frac{1}{\omega}$ e de ω^3 na figura ao lado.



c) determine as raízes complexas da equação $z^3 - 1 = 0$.

Resolução

A partir do número complexo ω dado no enunciado, sua forma trigonométrica é:

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,sen\frac{2\pi}{3} = cis\frac{2\pi}{3}$$

a) Sabendo que $\frac{1}{\omega} = \omega^{-1}$, $(cis\theta)^n = cis(n\theta)$ temos

$$\frac{1}{\omega} = \omega^{-1} = \left[cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{-1} = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Como cos(–θ)=cis(2π-θ) e sen(–θ)=sen(2π-θ), temos:

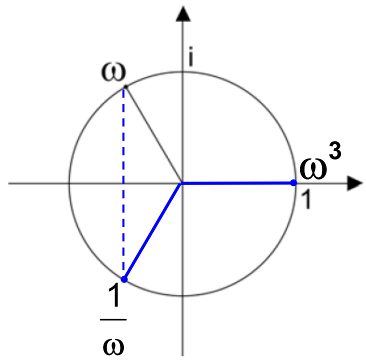
$$\frac{1}{\omega} = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = cis\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = cis\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\boxed{Re\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{2} \text{ e } Im\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\omega^3 = \left[cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3 = cis\left(3.\frac{2\pi}{3}\right) = cis2\pi = 1$$

Logo, $\boxed{Re(\omega^3)=1 \text{ e } Im(\omega^3)=0}$.

b) Como $|\omega| = \left|\frac{1}{\omega}\right| = |\omega^3| = 1$, temos, sabendo que na circunferência trigonométrica, o arco de $\frac{4\pi}{3}$ é o correspondente, no terceiro quadrante do arco de $\frac{2\pi}{3}$ e que o arco de 2π é o extremo positivo do eixo x, temos a seguinte representação gráfica:



c) Sabendo que $z^3 - 1 = 0$ é uma equação de grau 3, ela tem 3 raízes complexas, que são as raízes cúbicas de 1, pois $z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1}$.

Tal equação é chamada de equação ciclotômica, sendo uma particularidade da equação $z^n - 1 = 0$.

As raízes de tal equação são, no plano complexo, os vértices de um polígono regular centrado na origem de uma circunferência de raio 1, sendo que um desses vértices é o ponto (1,0).

Assim, as raízes dividem tal circunferência unitária em arcos congruentes de medida $\frac{2\pi}{n}$ (no caso $\frac{2\pi}{3}$).

Portanto, para a equação pedida, sendo z_1, z_2 e z_3 suas raízes, temos:

$z_1=1$, $z_2= cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e $z_3= cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

$$S=\left\{1, cis\left(\frac{2\pi}{3}\right), cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\}.$$

Obs.: Essas raízes estão representadas geometricamente no item b desta questão.

QUESTÃO 10

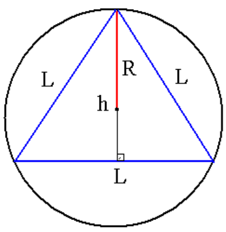
Pedrinho, brincando com seu cubo mágico, colocou-o sobre um copo, de maneira que

- apenas um vértice do cubo ficasse no interior do copo, conforme ilustra a foto;
- os pontos comuns ao cubo e ao copo determinassem um triângulo eqüilátero.

Sabendo-se que o bordo do copo é uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$ *cm* , determine o volume da parte do cubo que ficou no interior do copo.

Resolução

Observando a secção que passa pelo bordo do copo, temos a seguinte representação:



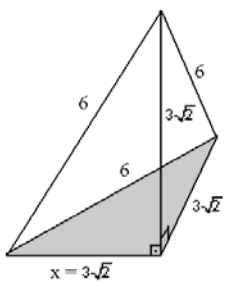
O raio da circunferência circunscrita a um triângulo eqüilátero de lado L é igual a 2/3 de sua altura, logo:

$$R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = 6cm$$

A parte do cubo que ficou no interior do copo é um tetraedro tri-retângulo, onde uma face é um triângulo eqüilátero de lado L = 6cm, e as outras 3 faces são triângulos retângulos isósceles. Sendo x as medidas dos lados desses triângulos, temos que:

$$x^2 + x^2 = 6^2 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}cm$$

Podemos então representar esta região:



Assim, o volume desse tetraedro é igual a:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}cm^3$$