

APOSTILA DE REVISÃO MATEMÁTICA – FRENTE 1

CONJUNTOS

1 - Noções Básicas

Conjunto: é uma coleção de elementos.

- a) vazio: não possui elementos
- b) unitário: possui um único elemento
- c) universo: conjunto que possui todos os elementos

Relação de pertinência: se x é um elemento do conjunto $A \Rightarrow x \in A$.
Caso contrário, $x \notin A$.

Subconjunto: se todos os elementos de um conjunto A pertencem a um conjunto B então A é subconjunto de B , ou seja, $A \subset B$ (A está contido em B).

Operações com conjuntos:

- a) união: $A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- b) intersecção: $A \cap B = \{x, x \in A \text{ e } x \in B\}$
- c) diferença: $A - B = \{x, x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Complementar: se $A \subset B$ então o complementar de A com relação à B é o conjunto $C_A^B = B - A$.

O **número de elementos da união de dois conjuntos** pode ser obtido pela seguinte relação: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Conjunto das partes: dado um conjunto A , o conjunto das partes de A , $P(A)$, é o conjunto de todos os possíveis subconjuntos de A . Se A possui n elementos, então $P(A)$ possui 2^n elementos.

2 – Conjuntos Numéricos

Números naturais: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números inteiros: $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números racionais: $\mathbf{Q} = \{a/b, \text{ com } a, b \in \mathbf{Z} \text{ e } b \neq 0\}$

Obs: o conjunto dos números racionais é formado por todas as frações e por dízimas periódicas.

Números irracionais: são todos os números que não podem ser escritos como uma fração de dois números inteiros. É o conjunto \mathbf{I} .

Obs: todas as dízimas não-periódicas são irracionais.

Números reais: $\mathbf{R} = \{x, x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$.

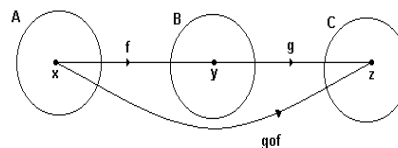
TEORIA BÁSICA DE FUNÇÕES

Definição: dados dois conjuntos A e B , uma relação $f: A \rightarrow B$ é chamada função quando associa a cada elemento de A um único elemento de B . O domínio de f é o conjunto A , o contra-domínio de f é o conjunto B e a imagem de f é o subconjunto de B formado por todos os elementos que estão em correspondência com os elementos de A .

Classificações

- a) sobrejetora: conjunto-imagem = contradomínio.
 - b) injetora: se $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
 - c) bijetora: função injetora e sobrejetora
 - d) função par: $f(x) = f(-x)$
 - e) função ímpar: $f(x) = -f(-x)$
- obs: existem funções que não são nem pares nem ímpares.

Função composta: chama-se função composta, ou função de uma função, à função obtida substituindo-se a variável independente x por uma outra função.



Função inversa: se $f: A \rightarrow B$ é uma função bijetora, então existe uma função $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que se $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$.
Obs: para determinar a função inversa, escreve-se $y = f(x)$, e troca-se x por y e y por x na expressão. Isolando-se y obtemos então a expressão da função inversa de f .

Exemplo: Sendo $f(x) = 3x + 6$ e $g(x) = \log(x) - 1$ encontre as inversas.

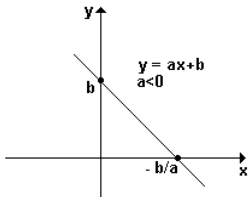
$$\begin{aligned} y &= 3x + 6 & y &= \log(x) - 1 \\ x &= 3y + 6 & x &= \log(y) - 1 \\ 3y &= x - 6 & \log(y) &= x + 1 \\ y &= \frac{1}{3}x - 2 & y &= 10^{x+1} \\ f^{-1}(x) &= \frac{1}{3}x - 2 & g^{-1}(x) &= 10^{x+1} \end{aligned}$$

Função composta com a inversa: se f é uma função inversível então $f \circ f^{-1}(x) = x$.

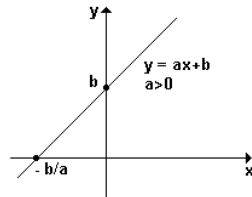
FUNÇÕES E EQUAÇÕES

1- Função do 1º grau

Definição: $f(x) = a \cdot x + b$, com $a \neq 0$. Seu gráfico sempre é uma reta.



Função decrescente



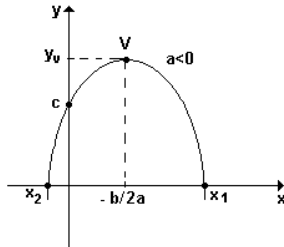
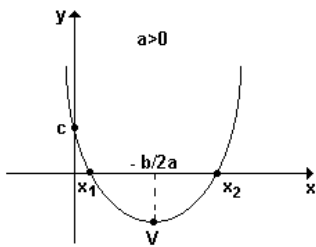
Função crescente

Zero da função do 1º grau: valores onde $f(x) = 0$.

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

2- Função do 2º grau

Definição: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Seu gráfico é uma parábola.



Zeros da função do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

Aqui, temos:

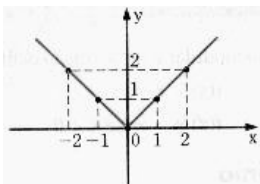
- a) se $\Delta > 0$: duas raízes reais (o gráfico de f corta o eixo x em dois pontos distintos).
- b) se $\Delta = 0$: uma raiz real (o gráfico de f tangencia o eixo x)
- c) se $\Delta < 0$: duas raízes complexas conjugadas (o gráfico de f não passa pelo eixo x).

Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Função biquadrada: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f(x) = ay^2 + by + c \mid y = x^2$

3- Função modular

Definição: $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: uma equação modular é uma equação do tipo $|f(x)| = g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções. Para resolver tais equações devemos estudar o sinal de f e aplicar a definição de módulo:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{quando } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{quando } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), & \text{quando } f(x) \geq 0 \\ -f(x) = g(x), & \text{quando } f(x) < 0 \end{cases}$$

Inequação modular: sendo $a \geq 0$:

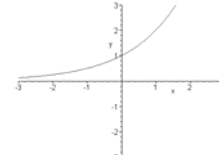
$$|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$$

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \text{ ou } f(x) > a$$

4- Função exponencial

Definição: $f(x) = a^x$, onde a é constante positiva.

a) $a > 1$



f é crescente
 $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$
Imagem = \mathbb{R}^+

b) $0 < a < 1$



f é decrescente
 $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$
Imagem = \mathbb{R}^+

Equação exponencial: são equações que possuem termos com expoentes. Observe que a equação $a^x = 0$ não tem solução, isto é, a função exponencial não possui raiz. $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

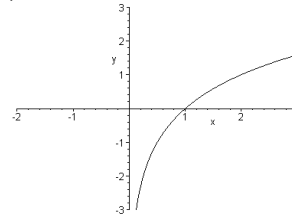
5- Função logarítmica

Logarítmica: se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$ então $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Consequência lógica: $a^{\log_a b} = \log_a a^b = b$

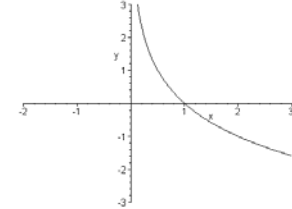
Definição: $f(x) = \log_a x$.

a) $a > 1$:



f é crescente
Imagem = \mathbb{R}
Domínio = \mathbb{R}^+

b) $0 < a < 1$:



f é decrescente
Imagem = \mathbb{R}
Domínio = \mathbb{R}^+

Propriedades dos logarítmicos

1) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

2) $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$

5) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

3) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Quantidade de algarismos: tomando-se um número aleatório b com n algarismos, temos que:

$$10^{n-1} \leq b < 10^n$$

$$\log(10^{n-1}) \leq \log(b) < \log(10^n)$$

$$n - 1 \leq \log(b) < n$$

$$n \leq \log(b) + 1 < n + 1$$

Assim, sendo c a parte inteira do $\log(b)$: $n = c + 1$.

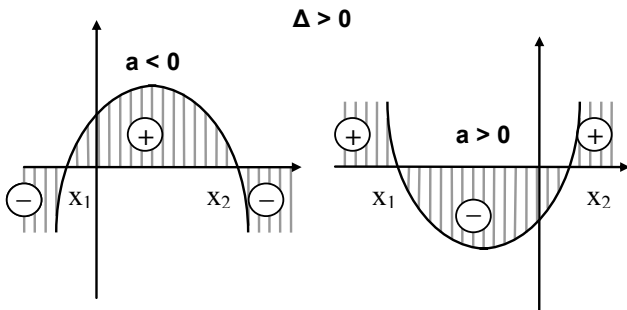
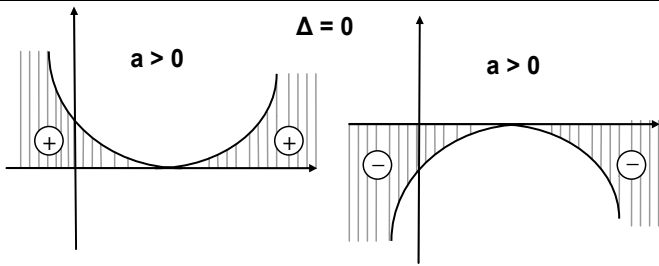
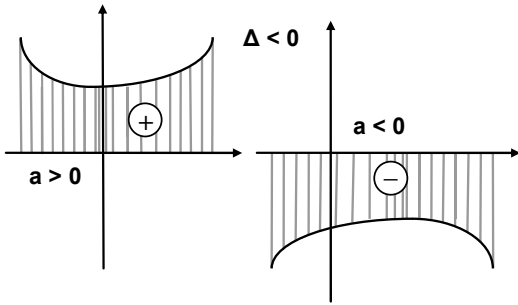
Equação logarítmica: equação do tipo $\log_a f(x) = g(x)$. Deve ser resolvida a partir das propriedades de logarítmicos.

Observação: resolver uma equação é o mesmo que encontrar os zeros de uma função. Normalmente, as equações são mistas, ou seja, são misturas de várias funções diferentes, o que torna difícil montar um modo de resolução específico para cada equação.

INEQUAÇÕES

Inequação do 2º grau: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

$\Delta < 0$	$a < 0$	$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
	$a > 0$	$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$a < 0$	$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
	$a > 0$	$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$a < 0$	$f(x) < 0, \forall x \in [-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty]$
		$f(x) > 0, \forall x \in [x_1, x_2]$
	$a > 0$	$f(x) > 0, \forall x \in [-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty]$
		$f(x) < 0, \forall x \in [x_1, x_2]$



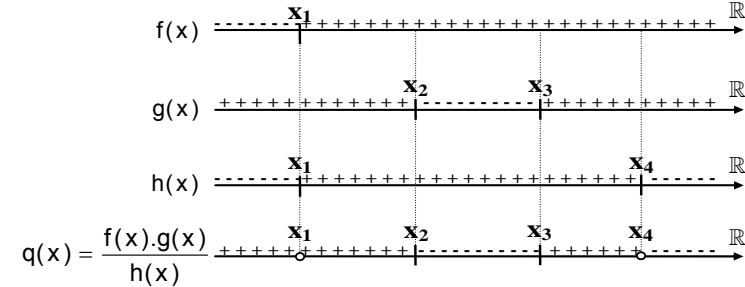
Obs: generalizando para uma equação polinomial de grau n , ao percorrermos os valores possíveis de x , temos que em toda raiz de multiplicidade ímpar há alteração do sinal da função, enquanto em raízes de multiplicidade par não há alteração do sinal.

Inequação modular: se $a < 0$: $|f(x)| > a \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 se $a \geq 0$: $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$
 $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ ou $f(x) > a$

Inequações produto e quociente: são inequações que envolvem o produto e/ou quociente de funções. É preciso montar um quadro de estudo de sinais das funções envolvidas.

Ex: Sejam $a, b, c, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $a, b > 0$; $c < 0$; $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$;
 $f(x) = a \cdot (x - x_1)$, $g(x) = b \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$, $h(x) = c \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_4)$ e

$$q(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$$



Pelo quadro de sinais acima, sabemos que:

- $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \Leftrightarrow q(x) > 0$
- $x \in (x_3, x_4) \Leftrightarrow q(x) < 0$
- $x \in \{x_2, x_3\} \Leftrightarrow q(x) = 0$
- $q(x)$ não está definida em x_1 e x_4

Inequações exponenciais e logarítmicas:

se $a > 1$: $a^x > a^n \Leftrightarrow x > n$
 $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$
 $\log_a f(x) > k \Leftrightarrow f(x) > a^k$ e $\log_a f(x) < k \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^k$

se $0 < a < 1$: $a^x > a^n \Leftrightarrow x < n$
 $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$
 $\log_a f(x) > k \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^k$ e $\log_a f(x) < k \Leftrightarrow f(x) > a^k$

SEQÜÊNCIAS

1- Progressão aritmética

Definição: seqüência na qual a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante.

Termo geral: $a_n = a_1 + (n - 1)r$

Soma dos n primeiros termos: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

2- Progressão geométrica

Definição: seqüência na qual o quociente entre dois termos consecutivos é sempre constante.

Termo geral: $a_n = a_1 q^{n-1}$

Soma dos n primeiros termos: $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

Soma de uma PG infinita: $S = \frac{a_1}{1 - q}$, onde $|q| < 1$

Dica: representar os termos de uma PA como $\dots, x - r, x, x + r, \dots$ ou $\dots, x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}, \dots$ e de uma PG como $\dots, \frac{x}{q}, x, xq, \dots$ ou

$\dots, \frac{x \cdot \sqrt{q}}{q^2}, \frac{x \cdot \sqrt{q}}{q}, x \cdot \sqrt{q}, x \cdot \sqrt{q} \cdot q, \dots$ pode facilitar a resolução de questões de geometria e polinômios onde alguns dados formam seqüências.

Somatório e Produtório:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

MATRIZES

Definição: Uma matriz $m \times n$ é uma tabela de $m \cdot n$ números dispostos em m linhas e n colunas. Se $m = n$, a matriz é dita matriz quadrada de ordem n . Um elemento na i -ésima linha e na j -ésima coluna é indicado por a_{ij} . Assim, uma matriz $A_{m \times n}$ é apresentada como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo: As matrizes A , B e C abaixo têm tamanhos respectivamente, 3×2 , 3×1 e 1×4 .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{37} & 500! \\ 1-i & \pi \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 15 \\ -23 \\ e^2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -17 & 2+6i \end{pmatrix}$$

Matriz Transposta: Dada uma matriz A , de tamanho $m \times n$, definimos a matriz transposta de A , representada por A^T , como a matriz de tamanho $n \times m$, obtida de A transformando suas m linhas em colunas, ou de modo equivalente, suas n colunas em linhas.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{37} & 500! \\ 1-i & \pi \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{37} & 1-i \\ 0 & 500! & \pi \end{pmatrix}$

Igualdade entre matrizes: Duas matrizes são iguais quando têm o mesmo número de linhas, o mesmo número de colunas, e seus termos correspondentes são iguais. Assim:

$$A_{m \times n} = B_{p \times q} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ p = q \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j \end{cases}$$

Exemplo: As matrizes P e Q abaixo, ambas quadradas de ordem 3, são iguais para todo valor real de x .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x \\ 3! & |1-\sqrt{2}| & 1 \\ 2^3 & -\frac{1-5}{2} & |5^x| \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^0 & \log_9 3^{-1} & 1 \\ 6 & \sqrt{2}-1 & \text{tg } 45^\circ \\ 8 & 2 & 5^x \end{pmatrix}$$

Adição de matrizes: Dadas duas matrizes A e B , de mesmo tamanho $m \times n$, definimos a soma $A+B$ como sendo outra matriz, também de tamanho $m \times n$, cujos termos são a soma dos termos correspondentes das matrizes A e B . Assim:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5-\pi \\ -4 & \sqrt{20} \end{pmatrix}$. Então,

$$A+B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -6 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um número: Dados um número λ e uma matriz A , de tamanho $m \times n$, definimos o produto $\lambda \cdot A$ como sendo outra matriz, também de tamanho $m \times n$, onde cada termo é o produto do número λ pelo elemento correspondente da matriz A . Assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Em particular, a matriz $(-1) \cdot A$ é dita **matriz oposta** a A e representada por $-A$.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$, então $4 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4\pi \\ -8 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$ e a matriz

oposta a A é a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -\pi \\ 2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Produto de duas matrizes: Dadas duas matrizes A e B , sendo A de tamanho $m \times n$, e B de tamanho $n \times p$ (ou seja, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B), definimos o produto $A \cdot B$ como sendo uma matriz de tamanho $m \times p$ (ou seja, com o número de linhas de A e o número de colunas de B), onde cada elemento do produto $C = A \cdot B$ é dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Em outras palavras, o elemento da matriz produto C , na i -ésima linha e na j -ésima coluna, é obtido multiplicando-se os elementos correspondentes na i -ésima linha da matriz A e na j -ésima coluna da matriz B , e depois somando esses n produtos.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 7 + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 7 + 4 \cdot 2 & (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 17 & -11 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, o produto $B \cdot A$ não está definido, uma vez que o número de colunas de B não é igual ao número de linhas de A .

Matriz Nula: A matriz nula de tamanho $m \times n$ é a matriz que tem zeros em todas as suas entradas.

Exemplo: A matriz nula 2×3 é $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz Identidade: A matriz identidade de ordem n é a matriz quadrada $n \times n$ que tem o número um em sua diagonal principal e zero em todas as outras entradas.

Exemplo: A matriz identidade de ordem 3 é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz Inversa: Dizemos que uma matriz quadrada A , de ordem n , admite inversa, ou é inversível, quando existe uma outra matriz B , também quadrada de ordem n , tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, onde I_n denota a matriz identidade de ordem n . Quando tal matriz B existe, ela é dita matriz inversa de A e denotada por $B = A^{-1}$.

Exemplo: As matrizes $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

são inversas uma da outra, pois $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

APOSTILA DE REVISÃO MATEMÁTICA – FRENTE 2

MATEMÁTICA BÁSICA

1- Potenciação

Definição: seja n um número inteiro diferente de zero. Assim, dado um número real a, temos $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}}$.

Propriedades

- 1) se $a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1$
- 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- 3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- 5) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- 6) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- 7) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

2- Radiciação

Definição: radiciação é a operação inversa da potenciação. Assim, se n é um inteiro tal que $n > 1$, temos: $b^n = a \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}$

Propriedades

- 1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- 2) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$
- 3) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- 4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Racionalização de denominadores: a racionalização de denominadores consiste em transformar um denominador irracional, indicado por um radical, em um denominador racional, sem alterar sua fração.

- 1) $\frac{1}{\sqrt{a^p}} = \frac{1}{\sqrt{a^p}} \cdot \frac{\sqrt{a^{n-p}}}{\sqrt{a^{n-p}}} = \frac{\sqrt{a^{n-p}}}{a}$
- 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$
- 3) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

3- Produtos Notáveis

- $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
- $$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$
- $$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$
- $$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$
- $$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$
- $$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
- $$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

4- Aritmética

Teorema fundamental da aritmética: todo número inteiro pode ser decomposto como produto de seus fatores primos.

Máximo divisor comum: maior número inteiro que divide simultaneamente uma série de números dados.

Mínimo múltiplo comum: menor número que é múltiplo simultaneamente de uma série de números dados.

Propriedade: $a \cdot b = \text{mdc}(a;b) \cdot \text{mmc}(a;b)$

5- Regra de Três

Grandezas diretamente proporcionais: duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando-se ou diminuindo-se uma delas, a outra aumenta ou diminui na mesma proporção.

$$\frac{X}{Y} = K$$

Grandezas inversamente proporcionais: duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra aumenta na mesma proporção.

$$X \cdot Y = K$$

Regra de três simples direta: uma regra de três simples direta é uma forma de relacionar grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{X}{Y} = K = \frac{W}{Z} \Rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{W}{Z} \Rightarrow X = \frac{Y \cdot W}{Z}$$

Regra de três simples inversa: uma regra de três simples inversa é uma forma de relacionar grandezas inversamente proporcionais.

$$A \cdot B = K = C \cdot D \Rightarrow \frac{A}{D} = \frac{C}{B}$$

Regra de três composta: regra de três composta é um processo que relaciona grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou uma mistura dessas situações

Situação	Grandeza 1	Grandeza 2	Grandeza n
1	A1	B1	X1
2	A2	B2	X2

Aqui, temos dois casos:

1) se todas as grandezas são diretamente proporcionais à grandeza n, basta resolvermos a proporção:

$$\frac{X1}{X2} = \frac{A1 \cdot B1 \cdot C1 \cdot D1 \dots}{A2 \cdot B2 \cdot C2 \cdot D2 \dots}$$

2) se algumas das grandezas são inversamente proporcionais à grandeza n, basta invertermos a posição dessa grandeza. Suponha, por exemplo, que a grandeza 2 é inversamente proporcional à grandeza n:

$$\frac{X1}{X2} = \frac{A1 \cdot B2 \cdot C1 \cdot D1 \dots}{A2 \cdot B1 \cdot C2 \cdot D2 \dots}$$

6- Matemática financeira

Aqui, j simboliza juros, i simboliza a taxa de juros, t é o tempo, C é o capital aplicado e M é o montante final (capital + juros).

Juros Simples: somente o capital inicial aplicado rende juros.

$$j = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + C \cdot i \cdot t = C + j$$

Juros Compostos: após cada período, os juros são incorporados ao capital, proporcionando juros sobre juros.

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$j = M - C$$

BINÔMIO DE NEWTON

Fatorial: Define-se o fatorial de um número natural n de maneira recursiva:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)!, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Assim, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Exemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Número binomial: Dados dois números naturais n e k, definimos o

$$\text{número binomial} \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } n \geq k \\ 0, & \text{se } n < k \end{cases}$$

Exemplo: $\binom{3}{5} = 0$ e $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$

Propriedade: $\binom{n}{k} = \binom{n}{p} \neq 0 \Rightarrow k = p \text{ ou } k + p = n$

Triângulo de Pascal: Colocando-se os números binomiais não-nulos de maneira organizada, segundo a qual os binomiais de mesmo termo superior estão na mesma linha, e os binomiais de mesmo termo inferior estão na mesma coluna, formamos o triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Relação de Stifel: Se somarmos dois termos consecutivos numa mesma linha do triângulo de Pascal, o resultado dessa adição é o número binomial imediatamente abaixo da segunda parcela, ou seja,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Esta relação nos dá um método extremamente rápido e eficiente para construir o triângulo de Pascal até a linha desejada.

Propriedade: A soma dos elementos da n-ésima linha do triângulo é igual a 2^n , ou seja, vale a identidade:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Binômios de Newton: são todas as potências da forma $(a+b)^n$, com n natural.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemplo: $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 =$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Termo geral do binômio: $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Exemplo: Se queremos o terceiro termo do desenvolvimento de $(a+b)^4$, fazemos $k = 2$ nessa fórmula para obter

$$T_3 = \binom{4}{2} a^{4-2} b^2 = 6a^2b^2$$

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Permutações:

$$P_n = n!$$

Exemplo: O número de anagramas da palavra UNICAMP é $7! = 5040$.

Permutações circulares:

$$P_n = (n-1)!$$

Exemplo: O número de maneiras distintas de dispor sete pessoas numa mesa circular é $(7-1)! = 720$

Permutações com elementos repetidos:

$$P_n^{a,b,\dots} = \frac{n!}{a!b!\dots}$$

Exemplo: O número de anagramas da palavra MACACA é:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

Arranjos: Faz distinção tanto em relação à ordem quanto em relação à natureza dos elementos do conjunto.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo: A quantidade de números de três algarismos que podemos formar com os elementos do conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ é $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$

Combinações: Faz distinção apenas em relação à natureza dos elementos, mas não leva em conta a ordem em que os mesmos são dispostos no problema.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo: O número de maneiras de escolher 2 alunos dentre os 40 presentes em uma sala de aula é dado por $\binom{40}{2} = 780$

PROBABILIDADE

Definição: A probabilidade de um evento E ocorrer é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

$$p(E) = \frac{N_F}{N_P}$$

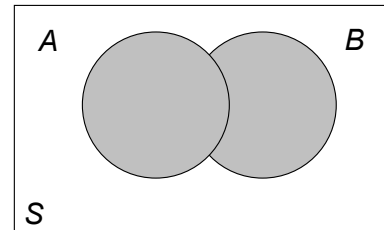
Como $0 \leq N_F \leq N_P$, temos que $0 \leq p(E) \leq 1$.

Exemplo: Ao lançarmos um dado com seis faces, vamos denotar os seguintes eventos:

- A – sair o número 2;
- B – sair um número ímpar;
- C – sair o número 7;
- D – sair um número menor que 10.

Então: $p(A) = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{1}{2}$, $p(C) = 0$ e $p(D) = 1$

Evento União: A probabilidade do evento união de dois eventos, A e B, é dada por $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.



Quando $p(A \cap B) = 0$, temos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, e nesse caso dizemos que os eventos A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos.

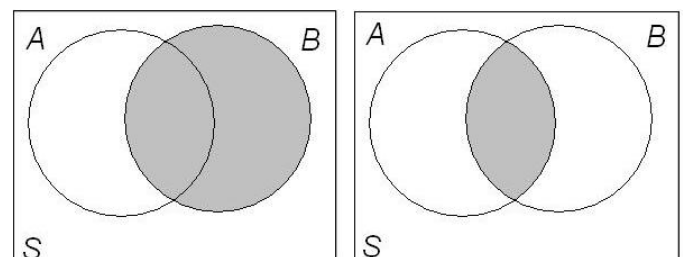
Exemplo: No lançamento de um dado de seis faces, seja A o evento “número primo” e B o evento “número par”. Temos que $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, de modo que $A \cap B = \{2\}$. Assim, a probabilidade do evento união é $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Probabilidade do Evento Complementar: Se um evento E tem probabilidade $p(E)$ de ocorrer, então seu evento complementar, denotado por E^c , ocorre com probabilidade $p(E^c) = 1 - p(E)$.

Exemplo: Refazendo o exemplo anterior de outro modo, considere o evento E em que o número que sai no dado não é nem primo nem par. Temos que $E = \{1\}$, e $A \cup B = E^c$, logo:

$$p(A \cup B) = p(E^c) = 1 - p(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Probabilidade Condicional: É a probabilidade de ocorrer um certo evento A, sabendo já ter ocorrido um outro evento B, ou seja, é a probabilidade de ocorrer o evento A, dado que ocorreu B.



Essa probabilidade é denotada por $p(A|B)$, e vale:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Exemplo: Ao lançarmos um dado de seis faces, a probabilidade de obtermos o número 2 (evento A), sabendo que saiu um número par (evento B) é:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Olhando esse resultado sob outro aspecto, isso quer dizer que se já sabemos que saiu um número par, nosso espaço amostral não mais é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mas sim o conjunto $B = \{2, 4, 6\}$, ou seja, o espaço amostral foi reduzido, e a probabilidade condicional nos indica a chance de obter a face com o número 2 não mais no espaço todo, mas no novo espaço amostral B.

Exemplo: Tenho três moedas honestas e uma moeda com duas caras. Sorteio, ao acaso, uma dessas quatro moedas e verifico que o resultado é cara. Qual a probabilidade de eu ter sorteado uma das moedas honestas?

Chamemos de A o evento sortear uma moeda honesta, e B o evento obter cara no lançamento de uma das moedas. Então:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

Independência de Eventos: Quando o evento A independe da ocorrência do evento B, dizemos que A e B são eventos independentes. Nesse caso, temos $p(A|B) = p(A)$, e portanto $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Ensaio de Bernoulli: Se um evento E tem probabilidade p de acontecer num determinado experimento, então ao realizarmos n experimentos idênticos, todos nas mesmas condições, a probabilidade de que o evento E ocorra exatamente k vezes é dada por:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Exemplo: Ao lançar um dado de seis faces três vezes seguidas, a probabilidade de que o número 6 saia exatamente uma vez é dada por

$$\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

Exemplo: Ao lançarmos um dado de seis faces três vezes seguidas, a probabilidade de que o número 6 saia pelo menos uma vez pode ser calculada de duas maneiras. A primeira é pensar que o número 6 sai pelo menos uma vez quando ele sai exatamente em uma das três vezes, ou quando ele sai exatamente em duas das três vezes, ou quando ele sai nos três lançamentos. Assim teríamos:

$$\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{91}{216}$$

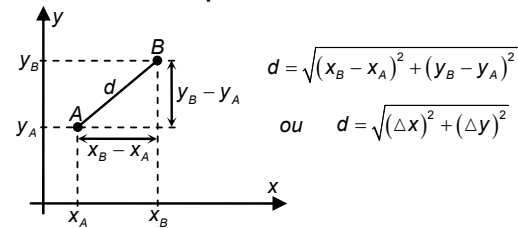
A segunda maneira é pensar no evento complementar. O evento complementar de “sair o número 6 pelo menos uma vez” é o evento “não sair o número 6 nenhuma vez”. A probabilidade deste último é

dada por $\binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$. Logo, a probabilidade do evento

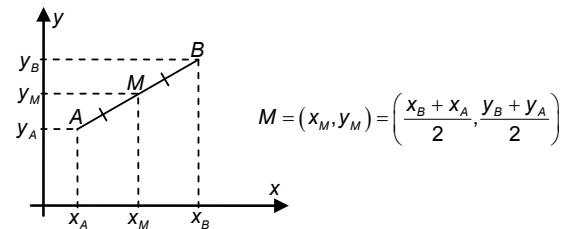
complementar vale $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

GEOMETRIA ANALÍTICA

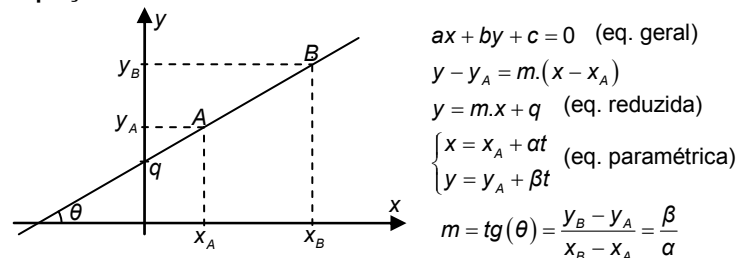
Distância de dois pontos



Ponto médio

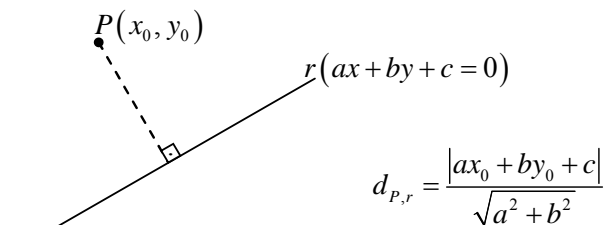


Equações da reta



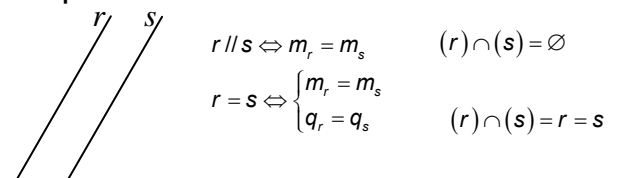
m : coeficiente angular q : coeficiente linear

Distância de Ponto a Reta

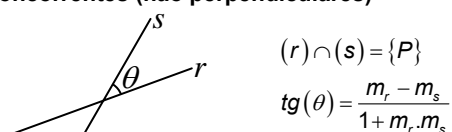


Posição relativa entre retas:

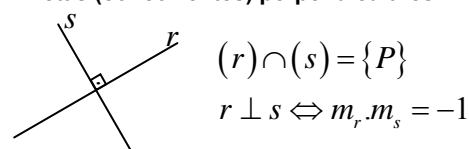
- Retas paralelas:



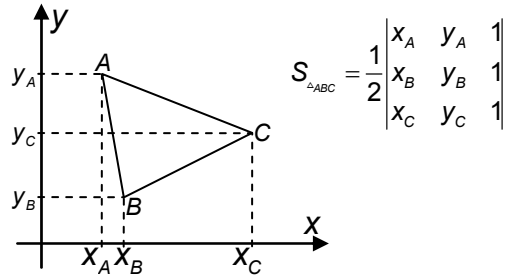
- Retas concorrentes (não perpendiculares)



- Retas (concorrentes) perpendiculares



Área do triângulo



Condição de alinhamento de três pontos

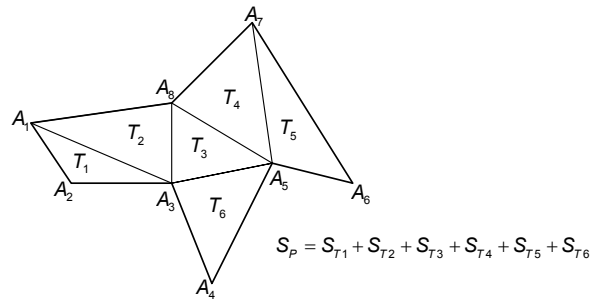
A, B e C estão alinhados se, e somente se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Área de polígonos (triangularização de polígonos)

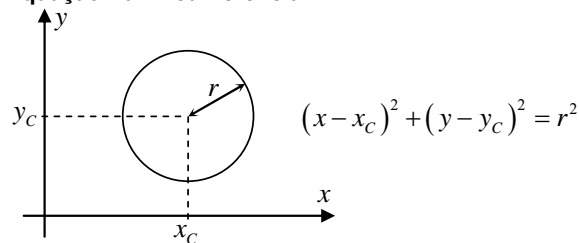
Dado um polígono P qualquer, uma triangularização de P é uma divisão de P em n triângulos T₁, T₂, ..., T_n, desde que:
- a união de todos os triângulos é igual ao polígono; e
- a interseção deles, dois a dois, seja vazia, uma reta ou um ponto.

$S_P = S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3} + \dots + S_{T_n}$

Exemplo:



Equação Da Circunferência



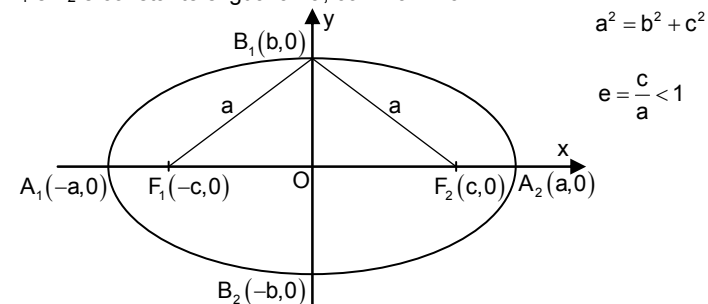
Obs: uma equação na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

representa uma circunferência de centro $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A})$ e raio

$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$, desde que $A = C \neq 0$, $B = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

CÔNICAS

ELIPSE: Dados dois pontos F₁ e F₂ distantes 2c. Uma elipse de focos em F₁ e F₂ é o conjunto dos pontos P(x,y) cuja soma das distâncias a F₁ e F₂ é constante e igual a 2a, com 2a > 2c.



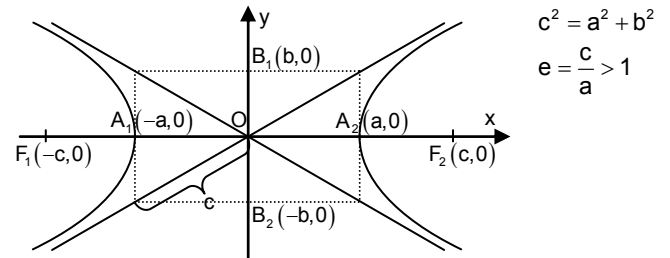
O: centro F₁, F₂: focos A₁, A₂, B₁, B₂: vértices A₁A₂: eixo maior (2a) B₁B₂: eixo menor (2b) F₁F₂: distância focal (2c) e: excentricidade

Equações reduzidas – centro em (x₀, y₀)

- A₁A₂ // Ox: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

- A₁A₂ // Oy: $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

HIPÉRBOLE: Dados dois pontos F₁ e F₂ distantes 2c. Uma hipérbole de focos em F₁ e F₂ é o conjunto dos pontos P(x,y) cujo módulo da diferença das distâncias a F₁ e F₂ é constante e igual a 2a, com 2a < 2c.



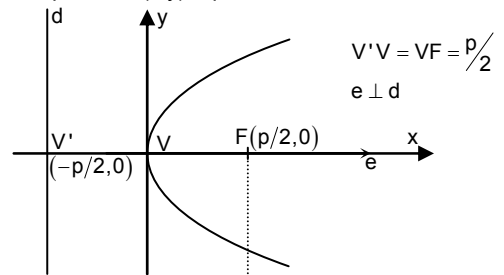
O: centro F₁, F₂: focos A₁, A₂: vértices e: excentricidade A₁A₂: eixo real (2a) B₁B₂: eixo imaginário ou conjugado (2b) F₁F₂: distância focal (2c)

Equações reduzidas – centro em (x₀, y₀)

- A₁A₂ // Ox: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

- A₁A₂ // Oy: $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

PARÁBOLA: Dados um ponto F e uma reta d (F ∉ d). Uma parábola é o conjunto dos pontos P(x,y) eqüidistantes de F e d.



F: foco V: vértice V'F: p – parâmetro e: eixo de simetria

Equações reduzidas – centro em (x₀, y₀)

- e // Ox: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

- e // Oy: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

RECONHECIMENTO DE UMA CÔNICA

Dada uma equação do 2º grau redutível à forma $\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1$	
k ₁ = k ₂	Circunferência
k ₁ > 0, k ₂ > 0 e k ₁ > k ₂	Elipse de eixo maior horizontal
k ₁ > 0, k ₂ > 0 e k ₁ < k ₂	Elipse de eixo maior vertical
k ₁ > 0 e k ₂ < 0	Hipérbole de eixo real horizontal
k ₁ < 0 e k ₂ > 0	Hipérbole de eixo real vertical

Rotação de eixos

As coordenadas de um ponto P(x,y) após a rotação de eixos de um ângulo θ são dadas por (x', y') tais que

$x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta$	$y = x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta$
---	---

Interpretação de uma equação do 2º grau

Dada a eq. geral do 2º grau: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$
é sempre possível eliminar o seu termo retângulo (2Bxy) através de um rotação de eixos de um ângulo θ tal que

A = C → θ = π/4	A ≠ C → tg 2θ = 2B/(A - C)
-----------------	----------------------------

NÚMEROS COMPLEXOS

Definição: são todos os números na forma $z = a + b.i$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária, com $i^2 = -1$. Também são representados na forma $z = (a, b)$, como um par ordenado de números reais.

Obs: se $b = 0$, o número z é um *número real*; se $a = 0$ e $b \neq 0$, o número z é chamado *imaginário puro*.

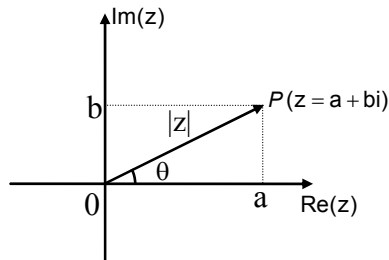
Conjugado: $\bar{z} = a - b.i$

Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Forma trigonométrica:

$z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$

Obs: o ângulo α é chamado *argumento* do número complexo, e é medido a partir do eixo real no sentido anti-horário.



Forma exponencial: $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$

Operações com números complexos

Sejam $z_1 = a + b.i$ e $z_2 = c + d.i$:

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d).i$

$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d).i$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \end{aligned}$$

dica: use a propriedade distributiva na multiplicação

Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

$z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$

$z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \cdot \text{sen } \beta)$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)]$

Potenciação e radiciação: se $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$ e n é um número inteiro então:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)] \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

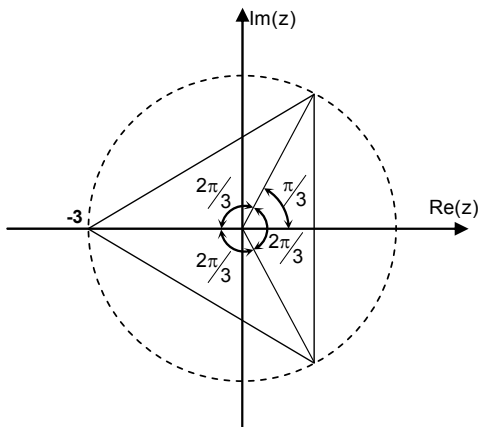
Obs: encontrar a raiz n -ésima de um número complexo z é resolver a equação $r^n = z$. Essa equação é de grau n , logo, possui n raízes. Assim, fazendo $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ na equação acima, encontramos, para cada k , uma raiz diferente, formando um polígono regular de n lados no plano de Gauss.

Exemplos:

$z^3 = -27 = 27 \cdot [\cos(\pi) + i \cdot \text{sen}(\pi)]$

$z = \sqrt[3]{27} \left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \right] = 3 \left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \right]$

Com $k = 0, 1, 2$

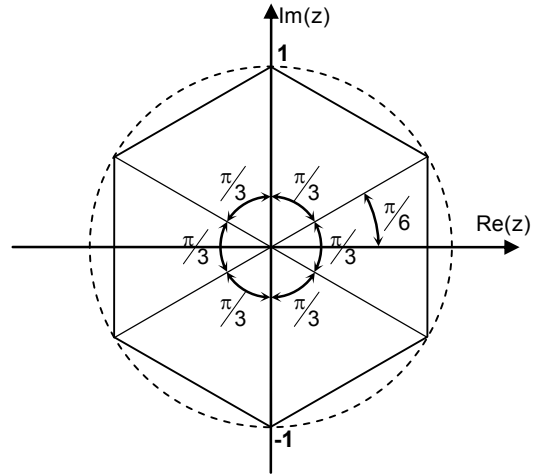


$z^6 = -1 = 1 \cdot [\cos(\pi) + i \cdot \text{sen}(\pi)]$

$z = \sqrt[6]{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) \right]$

$z = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)$

Com $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$



POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Definição de polinômio: seja n um número natural. Um polinômio de grau n é toda expressão do tipo

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

onde os valores a_0, a_1, \dots, a_n são constantes.

Exemplos:

$P_1(x) = x - 2$

$P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$P_3(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16$

$P_4(x) = x^2 - 2x + 2$

$P_5(x) = x^2 - 2ix - 1$

Polinômios idênticos: dois polinômios são idênticos quando seus termos correspondentes são iguais.

Exemplo: $ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = d = 0 \end{cases}$

Polinômio identicamente nulo: um polinômio é identicamente nulo quando $P(x) = 0$, independente do valor de x . Nesse caso, todos os coeficientes de P são nulos.

Exemplo: $P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0 = 0$

Equação polinomial ou algébrica: uma equação algébrica é um polinômio igualado a zero, ou seja:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$

Assim, resolver uma equação algébrica é o mesmo que encontrar as raízes de um polinômio.

Teorema fundamental da álgebra: se $P(x)$ é um polinômio de grau n então ele possui n raízes (reais ou complexas), e pode ser fatorado em:

$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$

onde r_1, \dots, r_n são as n raízes desse polinômio.

Exemplos:

$P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - 1/2)$

$P_3(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 = 2(x - 2)^3$

Teorema das raízes complexas: se $P(x)$ é um polinômio com *coeficientes reais* e o número complexo $a + bi$ é raiz de $P(x)$ então seu conjugado, $a - bi$, também é raiz.

Exemplo: Relembrando o *teorema fundamental da álgebra* temos:

$$P_4(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - (1+i))(x - (1-i))$$

Note que o polinômio $P_5(x) = x^2 - 2ix - 1$ admite $x = i$ como raiz, mas não admite seu conjugado, ($P_5(-i) = -4$). O Teorema das raízes complexas só é válido para polinômios com coeficientes reais.

Divisão de polinômios: dividir um polinômio $P(x)$ por um polinômio $D(x)$ significa encontrar dois polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto) que satisfaçam a condição $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Nota: Sendo n , d , r e q o grau dos polinômios $P(x)$, $D(x)$, $R(x)$ e $Q(x)$, respectivamente. Temos que $r = d - 1$ e $n = d + q$.

Dispositivo prático de Briot-Ruffini: receita de bolo para a divisão de $P(x)$ por $(x-a)$:

$$\begin{array}{r|cccc} a & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n & a_n \cdot a + a_{n-1} & \dots & & \end{array}$$

Passo 1: escrever todos os coeficientes ordenadamente, conforme o esquema acima;

Passo 2: copia-se o primeiro coeficiente;

Passo 3: multiplica-se o primeiro coeficiente pela raiz e soma-se com o segundo coeficiente;

Passo 4: faz-se a mesma coisa com o número obtido no passo anterior, até o último coeficiente;

Passo 5: o último número obtido é o resto da divisão, enquanto os outros são os coeficientes do polinômio $Q(x)$.

Exemplos: Encontre $Q(x)$ e $R(x)$ da divisão de:

a) $P_3(x)$ ($= 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16$) por $P_1(x)$ ($= x - 2$).

$$\begin{array}{r|cccc} 2 & 2 & -12 & 24 & -16 \\ \hline & 2 & -8 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(x) = 2x^2 - 8x + 8 \\ R(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 = (2x^2 - 8x + 8) \cdot (x - 2) + 0$$

b) $P_4(x)$ ($= x^2 - 2x + 2$) por $(x - 1)$

$$\begin{array}{r|ccc} 1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(x) = x - 1 \\ R(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 1) + 1$$

Teorema do resto: o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-a)$ é igual a $P(a)$. De fato, $P_3(2) = 0$ e $P_4(1) = 1$.

Generalizando: Na divisão de $P(x)$ por um polinômio $D(x)$ de grau n podemos obter $R(x)$, de grau $n - 1$, utilizando as raízes de $D(x)$ na equação $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Assim, para obter os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} do polinômio $R(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ basta resolver

$$\text{o sistema linear: } \begin{cases} R(x_1) = P(x_1) \\ R(x_2) = P(x_2) \\ \vdots \\ R(x_n) = P(x_n) \end{cases} \text{ onde } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ são raízes de } D(x)$$

Exemplo: Da divisão do polinômio $P_3(x)$ por $(x^2 - 3x + 2)$, de raízes 1 e 2, temos:

$$P_3(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow P_3(1) = 0 \cdot Q(1) + R(1) \\ x = 2 \Rightarrow P_3(2) = 0 \cdot Q(2) + R(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow R(x) = 2x - 4$$

Teorema das raízes racionais: seja $P(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes inteiros. Se P admite uma raiz racional p/q , com p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Exemplos: As raízes de $P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$ são $1/2$ e 1 , pertencem a $\{-1, -1/2, 1/2, 1\}$. Já em $P_4(x) = x^2 - 2x + 2$, nenhum dos valores possíveis $(-2, -1, 1 \text{ e } 2)$ zeram o polinômio, pois suas raízes $(1+i, 1-i)$ não são racionais.

Relações de Girard

a) $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

b) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

c) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

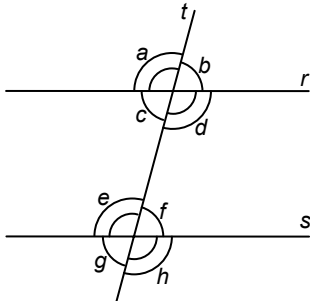
Seja S_p a soma de todos os possíveis produtos das n raízes p a p .

$$S_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad S_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad \dots \quad S_p = (-1)^p \cdot \frac{a_{n-p}}{a_n} \quad \dots \quad S_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

APOSTILA DE REVISÃO MATEMÁTICA – FRENTE 3

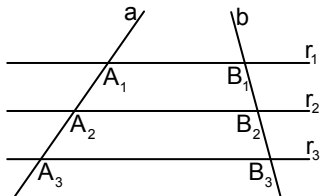
GEOMETRIA PLANA

Retas paralelas cortadas por uma transversal



$$r \parallel s \Rightarrow \begin{cases} a = d = e = h \\ b = c = f = g \end{cases}$$

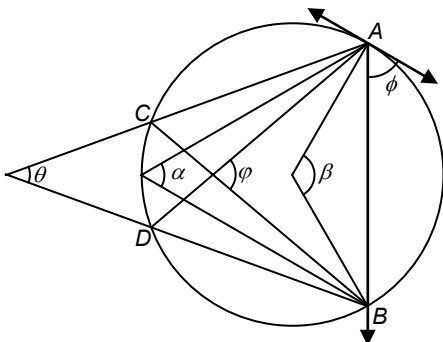
Teorema de Tales



$$r_1 \parallel r_2 \parallel r_3 \Rightarrow k = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}$$

k: constante de proporcionalidade

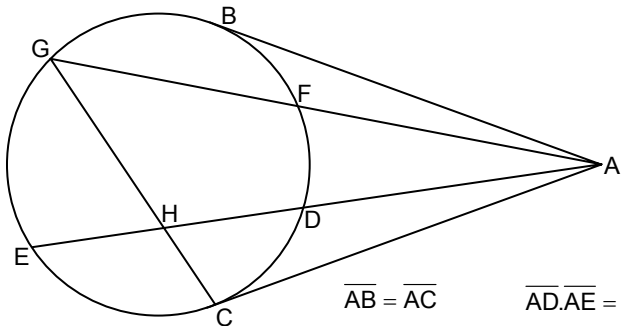
Ângulos na circunferência



$$\begin{aligned} \beta &= \widehat{AB} \\ \alpha &= \gamma = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \theta &= \left| \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \right| \\ \varphi &= \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \end{aligned}$$

α : ângulo inscrito β : ângulo central Φ : ângulo do segmento
 θ : ângulo excêntrico externo φ : ângulo excêntrico interno

Potência de pontos



$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \overline{AD} \cdot \overline{AE} & \overline{AD} \cdot \overline{AE} &= \overline{AF} \cdot \overline{AG} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AD} \cdot \overline{AE} & \overline{HC} \cdot \overline{HG} &= \overline{HD} \cdot \overline{HE} \end{aligned}$$

Polígonos

Soma dos ângulos internos: $S_{ai} = 180^\circ \cdot (n - 2)$

Soma dos ângulos externos: $S_{ae} = 360^\circ$ (**polígonos convexos**)

Número de diagonais: $nd = \frac{n(n-3)}{2}$

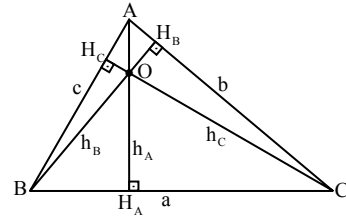
Ângulos internos de um polígono regular: $ai = 180^\circ \cdot (n - 2) / n$

Obs: Todo polígono regular é inscrito e circunscrito.

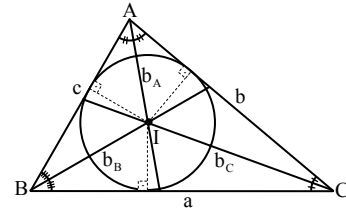
Triângulo

Pontos notáveis

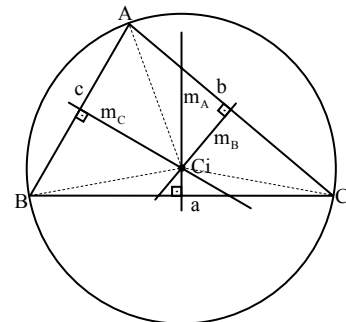
- **Ortocentro(O)**: encontro das alturas(h).



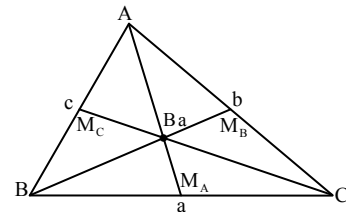
- **Incentro(I)**: encontro das bissetrizes(b) e centro do círculo inscrita no triângulo



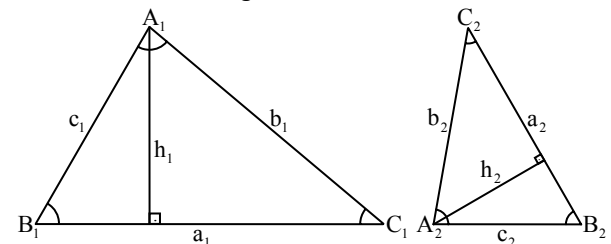
- **Circuncentro(Ci)**: encontro das mediatrizes(m) e centro do círculo circunscrito ao triângulo



- **Baricentro (Ba)**: encontro das medianas(M) que se dividem na razão 2:1. Também conhecido por centro de gravidade do triângulo.



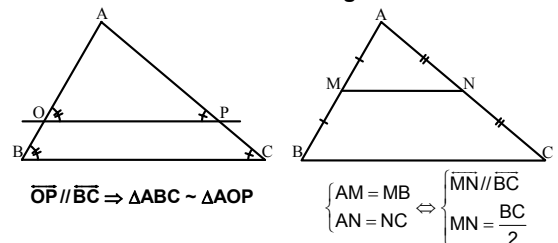
Semelhança de Triângulos



Se $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$ e $\hat{C} = \hat{C}_1$, então os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são semelhantes de razão $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{a_1 + b_1 + c_1} = \dots$

(k: razão entre linha homólogas)

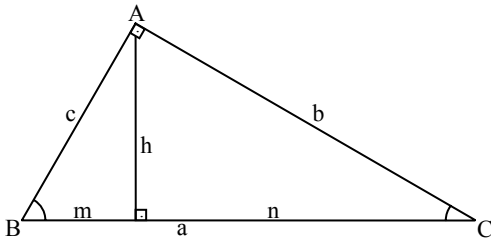
Teorema fundamental e Base do triângulo médio



$$\overline{OP} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AOP$$

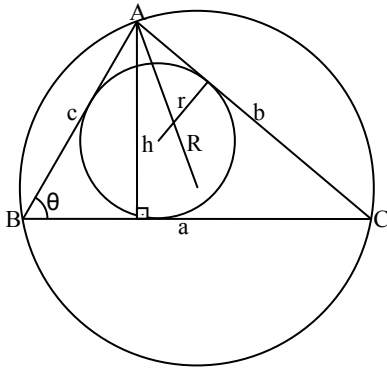
$$\begin{cases} \overline{AM} = \overline{MB} \\ \overline{AN} = \overline{NC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ \overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2} \end{cases}$$

Relações Métricas no Triângulo Retângulo



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b^2 = a.n \\ c^2 = a.m \\ b.c = a.h \\ h^2 = m.n \end{cases}$$

Área do Triângulo



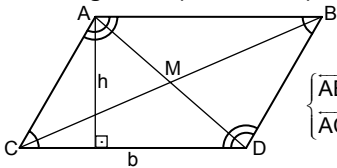
$$\begin{aligned} S &= \frac{a.h}{2} & p &= \frac{a+b+c}{2} \\ S &= \frac{a.c.\text{sen}(\theta)}{2} \\ S &= \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} \\ S &= \frac{a.b.c}{4R} \\ S &= \frac{(a+b+c).r}{2} = p.r \end{aligned}$$

Área do triângulo equilátero: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$

Quadriláteros

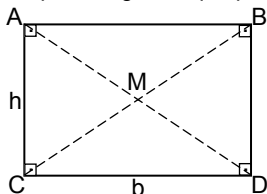
Trapezóide: quadrilátero que não possui lados paralelos.

Paralelogramo: quadrilátero que possui lados opostos paralelos.



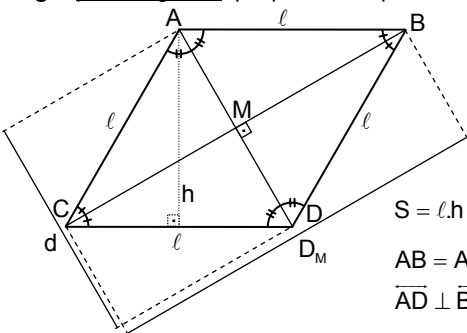
$$\begin{aligned} S &= b.h \\ \begin{cases} \overline{AB} // \overline{CD} \\ \overline{AC} // \overline{BD} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} AB = CD, AC = BD \\ \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{C}, A + B = 180^\circ \\ AM = MD, CM = MB \end{cases} \end{aligned}$$

Retângulo: paralelogramo que possui os quatro ângulos congruentes.



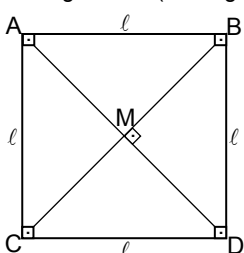
$$\begin{aligned} S &= b.h \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} &= 90^\circ \\ AM = BM = CM = DM & \end{aligned}$$

Losango: paralelogramo que possui os quatro lados congruentes.



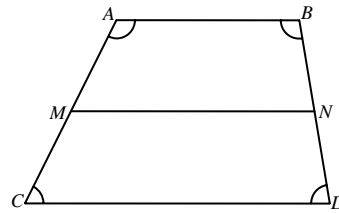
$$\begin{aligned} S &= l.h = \frac{D_M.d}{2} \\ AB = AC = BD = CD &= l \\ \overline{AD} \perp \overline{BC} & \end{aligned}$$

Quadrado: paralelogramo que possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes (Retângulo e Losango).



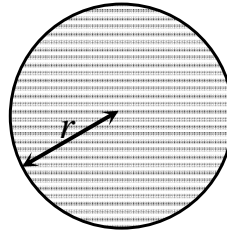
$$\begin{aligned} S &= \ell^2 \\ AB = AC = BD = CD &= \ell \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} &= 90^\circ \\ AD = BC = d = \sqrt{2}.\ell & \\ AD \perp BC & \\ AM = BM = CM = DM &= \frac{\sqrt{2}}{2}.\ell \end{aligned}$$

Trapézio: quadrilátero que possui um par de lados paralelo.



Escaleno: $AD \neq BC$
Isósceles: $AD = BC, \hat{A} = \hat{B} \text{ e } \hat{C} = \hat{D}$
Retângulo: $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \text{ ou } \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$
Base Média: $\begin{matrix} AM = MC \\ BM = MD \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} AB // MN // CD \\ MN = \frac{AB + CD}{2} \end{matrix}$

Circunferência, círculo e suas partes:

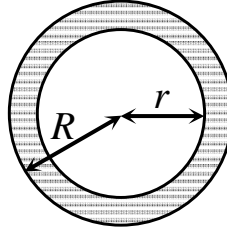


$C = 2\pi r$

$S = \pi.r^2$

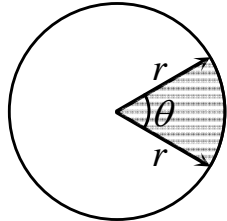
C: comprimento da circunferência

Coroa Circular:



$S = \pi.(R^2 - r^2)$

Setor Circular:



$L = \theta r$

$S = \frac{\theta r^2}{2} \text{ ou}$

$S = \frac{\theta}{360^\circ} . \pi r^2; \theta \text{ em graus}$

L: comprimento do arco

Áreas de Figuras Semelhantes: Se, em duas figuras semelhantes, a razão entre as linhas homólogas é igual a k, a razão entre as áreas é igual a k².

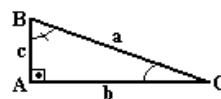
TRIGONOMETRIA

Trigonometria no triângulo retângulo:

$\text{seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$\text{cos seno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

$\text{tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$



Trigonometria em um triângulo qualquer:

Lei dos Senos

$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$

Lei dos Cossenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos \hat{A}$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos \hat{B}$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos \hat{C}$



Principais relações trigonométricas

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}, \text{ cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}, \text{ sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$$

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \text{cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \cdot \text{sen} \beta$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta \mp \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta$$

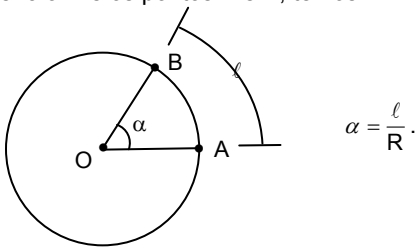
$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta}{1 \mp \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$$

$$\text{sen } p \pm \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{p \pm q}{2} \right) \cdot \text{cos} \left(\frac{p \mp q}{2} \right)$$

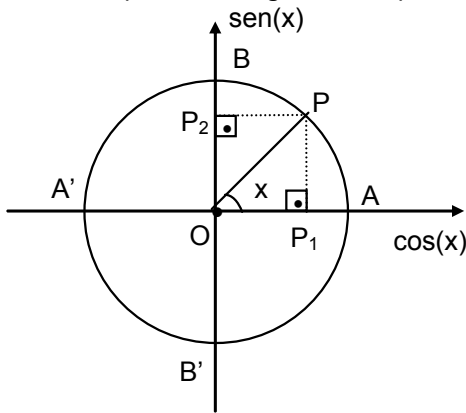
$$\text{cos } p + \text{cos } q = 2 \cdot \text{cos} \left(\frac{p + q}{2} \right) \cdot \text{cos} \left(\frac{p - q}{2} \right)$$

$$\text{cos } p - \text{cos } q = -2 \cdot \text{sen} \left(\frac{p + q}{2} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{p - q}{2} \right)$$

Arcos e Ângulos: Considerando a circunferência abaixo de centro O e raio R e os pontos A e B, temos:



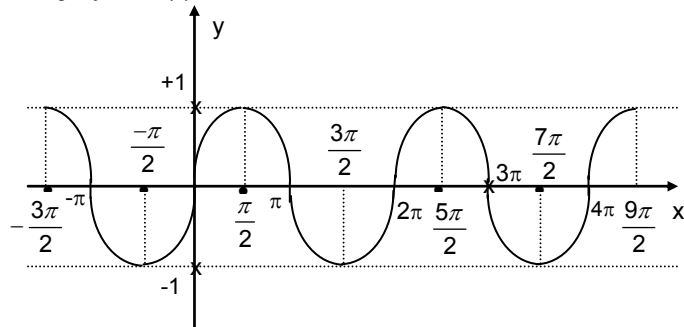
Ciclo trigonométrico (centro na origem e raio 1):



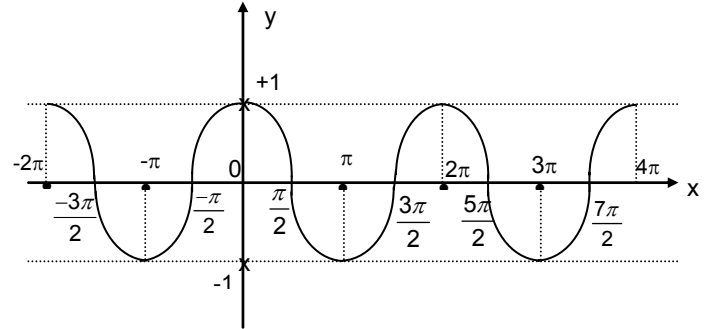
Funções trigonométricas:

As funções trigonométricas são todas periódicas. As funções básicas, $y = \text{sen}(x)$, $y = \text{cos}(x)$, $y = \text{sec}(x)$ e $y = \text{cosec}(x)$ têm período 2π , enquanto as funções básicas $y = \text{tg}(x)$ e $y = \text{cotg}(x)$ têm período π .

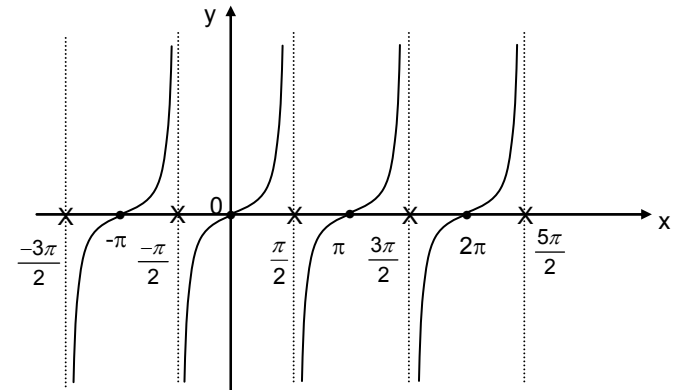
Esboço: $y = \text{sen}(x)$



Esboço: $y = \text{cos}(x)$



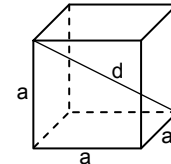
Esboço: $y = \text{tg}(x)$



GEOMETRIA ESPACIAL

Prismas

Cubo



$$d = a\sqrt{3}$$

$$S_L = 4a^2$$

$$S_T = 6a^2$$

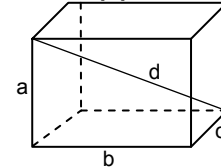
$$V = a^3$$

S_L : área lateral

S_T : área total

V : volume

Paralelepípedo reto retângulo



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$S_L = 2a(b + c)$$

$$S_T = 2(ab + ac + bc)$$

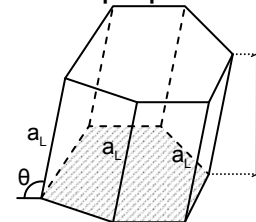
$$V = abc$$

S_L : área lateral

S_T : área total

V : volume

Prisma qualquer



$$h = a_L \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$S_L = P_{\text{Base}} \cdot a_L$$

$$S_T = S_L + 2S_{\text{Base}}$$

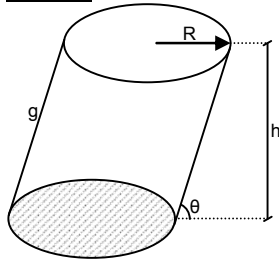
$$V = S_{\text{Base}} \cdot h = S_{\text{Base}} \cdot a_L \cdot \text{sen}(\theta)$$

S_L : área lateral S_T : área total V : volume P_{Base} : perímetro da base
 a_L : aresta lateral h : altura θ : ângulo entre a_L e Base

Prisma reto: $\theta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} h = a_L \\ S_L = P_{\text{Base}} \cdot h \end{cases}$

Prisma regular: prisma reto, cujas bases são polígonos regulares.

Cilindro



$$S_L = 2\pi Rg$$

$$S_T = S_L + S_B = 2\pi R(R + g)$$

$$V = \pi R^2 h$$

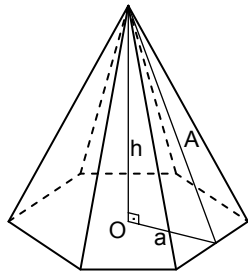
$$h = g \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$\text{cilindro reto: } \theta = 90^\circ \Rightarrow h = g \Rightarrow \begin{cases} S_L = 2\pi Rh \\ S_T = 2\pi R(R + h) \end{cases}$$

g: geratriz **R:** raio da base **h:** altura **θ:** ângulo entre geratriz e base

Cilindro eqüilátero: $h = 2R$

Pirâmides



$$S_T = S_B + S_L$$

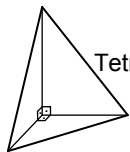
$$V = \frac{S_B \cdot h}{3}$$

$$\text{Pirâmide regular: } \begin{cases} A^2 = h^2 + a^2 \\ S_L = p \cdot A \end{cases}$$

h: altura **O:** centro da base **A:** apótema da pirâmide = altura da face
a: apótema da base **S_B, S_L e S_T:** área da base, lateral e total
p: semiperímetro da base

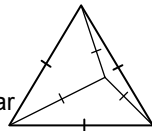
Pirâmide regular: a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre a base é o centro da mesma.

Tetraedros notáveis



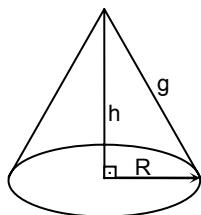
Tetraedro tri-retângulo

Tetraedro regular



Cone

Cone reto



$$g^2 = h^2 + R^2$$

$$S_L = \pi Rg$$

$$S_T = \pi R(R + g)$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

g: geratriz **h:** altura **R:** raio da base

Cone qualquer: em um cone não reto (ou oblíquo) não faz sentido falar em geratriz, temos, portanto, apenas a fórmula do volume.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Esfera



$$S_E = 4\pi r^2$$

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Sólidos semelhantes

São sólidos que possuem lados homólogos (correspondentes) proporcionais. A razão de semelhança k entre esses sólidos é a razão entre dois elementos lineares homólogos. Assim:

$$\frac{h}{H} = k \quad \frac{A_1}{A_2} = k^2 \quad \frac{V_1}{V_2} = k^3$$

Onde:

h, A_1, V_1 – altura, área, volume do menor sólido;
 H, A_2, V_2 – altura, área, volume do maior sólido.

Relação de Euler: $V - A + F = 2$